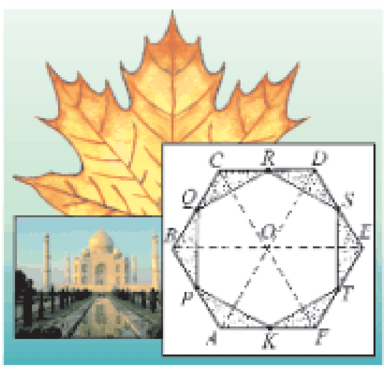
В. В. Шлыков

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса учреждений,
обеспечивающих получение общего среднего
образования, с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь



Минск «Народная асвета» 2007

УДК 514 (075.3=161.1)
ББК 22.151я721
Ш69

Р е ц е н з е н т ы:
кафедра алгебры и методики преподавания математики
ВГУ им. П. М. Машерова (канд. пед. наук, профессор *Е. Е. Семенов*);
учитель математики СШ № 153 г. Минска *А. И. Абрамович*

Шлыков, В. В.
Ш69 Геометрия : учеб. пособие для 10-го кл. учреждений, обеспечивающих получение общ. сред. образования, с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / В. В. Шлыков. — 2-е изд. — Минск : Нар. асвета, 2007. — 174 с. : ил.
ISBN 978-985-12-1706-5.

УДК 514(075.3=161.1)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-12-1706-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уважаемые друзья!

Изложенный в данном учебном пособии материал относится к заключительной части курса геометрии, которая традиционно называется планиметрией. В первой главе рассматриваются свойства вписанных и описанных углов. Ранее уже было рассмотрено понятие окружности и касательной к ней. Теперь эти понятия изучаются более детально, доказываются свойство и признак касательной к окружности, рассматривается вопрос о построении касательной к окружности с помощью циркуля и линейки. Для изучения на повышенном уровне изложен материал о взаимном расположении двух окружностей. Здесь же изучаются свойства центральных и вписанных углов, доказываются теоремы о градусной мере вписанного угла, о свойстве отрезков пересекающихся хорд окружности, а также об отрезках секущей и касательной. В первой главе также доказываются теоремы о точках пересечения биссектрис и высот треугольника. Далее излагаются свойства вписанных и описанных треугольников и четырехугольников.

Во второй главе рассматриваются вопросы о соотношении между сторонами и углами произвольного треугольника, доказываются теоремы синусов и косинусов. Для изучения на повышенном уровне приводится доказательство теоремы Герона. Кроме того, на уровне задач рассматривается вопрос о нахождении элементов треугольника с помощью теоремы синусов и косинусов.

В третьей главе излагаются вопросы о правильных многоугольниках, доказываются теоремы о вписанной и описанной окружностях, выводятся формулы для нахождения элементов правильного многоугольника через радиус вписанной или описанной окружности. Далее рассматривается понятие длины окружности, формулы длины окружности и ее дуги, площади круга, сегмента и сектора. Завершает главу материал о координатном методе.

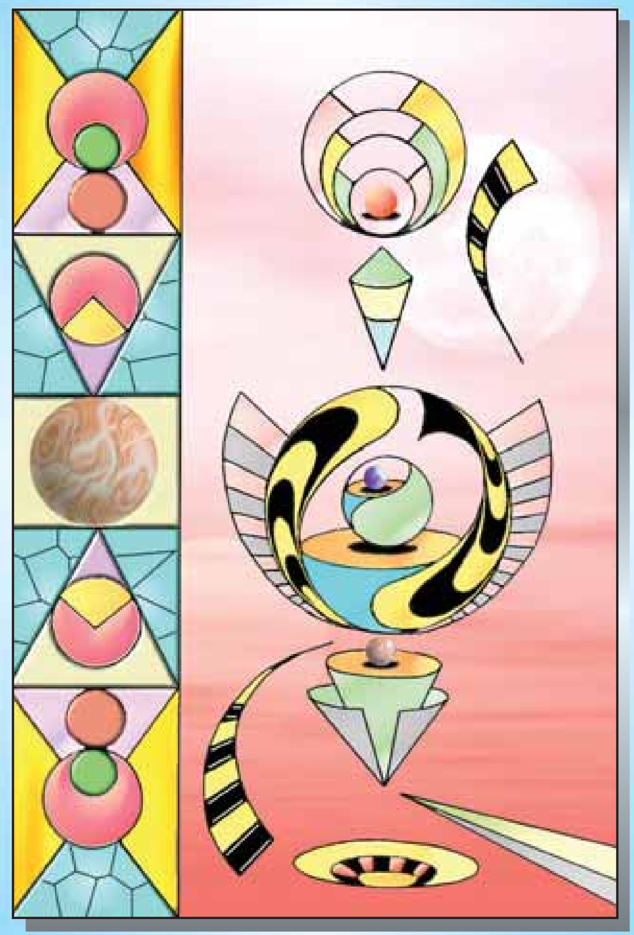
В четвертой главе рассматриваются задачи для повторения.

Система задач в учебном пособии обеспечивает организацию непрерывного повторения учебного материала. Систематически рассматриваются задачи, способствующие развитию пространственных представлений, а предложенная система графических моделей направлена на формирование графической культуры.

1

Вписанные и описанные многоугольники

Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности



В завораживающих архитектурных и художественных произведениях Востока и Запада, как в зеркале, отражается опыт цивилизации, в накопление которого внесли свой огромный вклад многие представители науки и искусства.

Одним из наиболее ярких и загадочных ученых, ставших олицетворением многосторонних интересов человека в области науки и искусства, является представитель эпохи Возрождения Леонардо да Винчи (1452—1519). На протяжении многих столетий достижения этого человека, ставшего символом своей эпохи, вызывают восхищение и стремление постичь тайну его гениальности, осмыслить величие и роль его научных трудов для развития Цивилизации. Леонардо да Винчи внес огромный вклад в развитие теории перспективы. В труде «Трактат о живописи» он изложил теорию применения центрального проектирования для построения пространственных объектов, раскрыл роль перспективы в практической деятельности художника, ее значение для создания произведений живописи. Подтверждением этому служат картины самого художника, иллюстрирующие плодотворность применения законов перспективы в области живописи, многие изображения архитектурных сооружений.

Исследования Леонардо да Винчи по теории перспективы имели большое значение и для самой геометрии, положили начало возникновению ряда новых разделов геометрии, послужили яркой иллюстрацией взаимно обогащающего влияния геометрии и искусства, ее значимости для различных областей интеллектуальной деятельности человека.

Вопросами применения теории перспективы занимался также известный немецкий математик и художник Альбрехт Дюрер (1471—1528), который являлся олицетворением эпохи Возрождения в Германии. Хорошее знание геометрии позволило ему во время поездок в Болонью и Венецию основательно изучить результаты исследований итальянских художников в области перспективы и применить их на практике. В своей работе «Руководство к измерению» он рассматривает несколько устройств и приспособлений, позволяющих строить правильную перспективу. Применению перспективы А. Дюрер придавал большое значение. Свое почтительное отношение к ней великий художник выразил словами: «Узнать законы перспективы я желал более, чем получить королевство».

Глава 1
ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

§1. Взаимное расположение прямой и окружности. Касательная к окружности

1. Взаимное расположение прямой и окружности. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении прямой и окружности. Ранее уже отмечалось, что возможны три случая взаимного расположения прямой и окружности:

1) *прямая имеет только две общие точки с окружностью*;
2) *прямая имеет только одну общую точку с окружностью*;
3) *прямая не имеет общих точек с окружностью*.

Если прямая имеет две общие точки с окружностью, то она называется *секущей*.

Взаимное расположение окружности $\omega(O;\ R)$ с центром в точке O радиуса R и прямой l характеризуется соотношением между расстоянием $d(O,\ l)$ от центра O окружности до прямой l и радиусом R окружности. Покажем это.

1) *Прямая l имеет только две общие точки с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой l меньше радиуса окружности*, т. е. если $d(O,\ l) < R$ (рис. 1).

Пусть прямая l не проходит через центр O окружности и расстояние $d(O,\ l) = m < R$. Обозначим OF $(F \in l)$ перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой l, тогда $OF = m$. Пусть точки A и B — точки прямой l такие, что $FA = FB = \sqrt{R^2 - m^2}$. Докажем, что точки A и B принадлежат окружности.

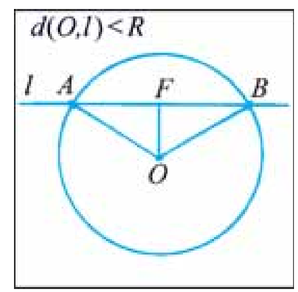


Рис. 1

Действительно, так как по теореме Пифагора $OA = \sqrt{OF^2 + FA^2} = \sqrt{m^2 + (R^2 - m^2)} = R$ и $OB = \sqrt{OF^2 + FB^2} = \sqrt{m^2 + (R^2 - m^2)} = R$, то $OA = OB = R$. Таким образом, точки A и B — общие точки прямой и окружности. Докажем, что других общих точек прямая l и окружность $\omega(O;\ R)$ не имеют. Предположим, что существует еще одна точка X — общая для окружности и прямой. Тогда центр окружности O равноудален от точек A, B и X, а значит, он лежит на серединных перпендикулярах l_1 и l_2 к отрезкам AB и BX, т. е. O — точка пересечения серединных перпендикуляров l_1 и l_2. Но так как $l_1 \perp l$ и $l_2 \perp l$, то $l_1 \parallel l_2$. Получили противоречие. Значит, наше предположение не верно и других общих точек прямой и окружности нет.

Если прямая l проходит через центр O окружности, т. е. $d(O,\ l) = 0$, то она пересекает окружность в двух точках, которые являются концами диаметра, лежащего на этой прямой.

2) *Прямая l имеет только одну общую точку с окружностью, если расстояние от центра окружности до прямой l равно радиусу окружности:* $d(O,\ l) = R$.

Пусть расстояние от центра окружности до прямой l равно радиусу окружности, а точка F — основание перпендикуляра, проведенного из центра окружности к прямой l (рис. 2). Тогда $OF = R$, а значит, точка F лежит на окружности. Других общих точек прямая и окружность не имеют. Действительно, для любой точки X прямой l, не совпадающей с точкой F, выполняется условие $OX > OF = R$, так как наклонная OX больше перпендикуляра OF. Следовательно, точка X не лежит на окружности.

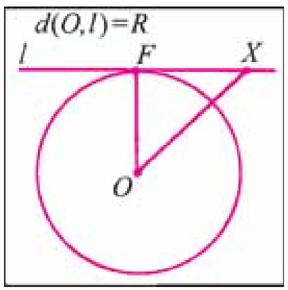


Рис. 2

3) *Прямая l не имеет общих точек с окружностью, если расстояние от центра O окружности до прямой l больше радиуса окружности*: $d(O,\ l) > R$.

Пусть расстояние от центра O окружности до прямой l больше радиуса R. Обозначим буквой F основание перпендикуляра, проведенного из центра O окружности к прямой l (рис. 3). Тогда $OF = d(O,\ l) > R$. Для любой точки X прямой выполняется условие $OX \geqslant OF > R$, следовательно, точка X не лежит на окружности. Таким образом, в случае $d(O,\ l) > R$ прямая и окружность не имеют общих точек.

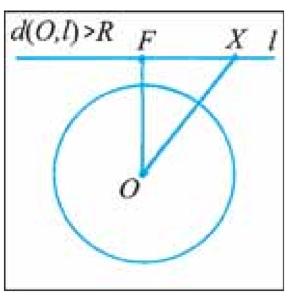


Рис. 3

2. Касательная к окружности. Рассмотрим случай, когда прямая и окружность имеют единственную общую точку. Прямая, имеющая единственную общую точку с окружностью, имеет специальное название — *касательная*.

Определение. Касательной к окружности называется прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку.

Единственная общая точка прямой и окружности называется *точкой касания* прямой и окружности.

Если прямая l имеет единственную общую точку A с окружностью, то говорят, что прямая l касается окружности в точке A.

Теорема (*свойство касательной*). Касательная к окружности перпендикулярна радиусу этой окружности, проведенному в точку касания.

Доказательство.

1) Пусть прямая l касается окружности $\omega(O;\ R)$ в точке A (рис. 4). Докажем, что $l \perp OA$.

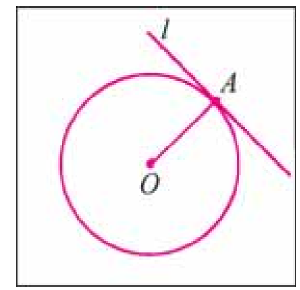


Рис. 4

2) Предположим, что это не так. Тогда радиус OA является наклонной к прямой l. Перпендикуляр, проведенный из точки O к прямой l, меньше наклонной OA, следовательно, расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса. Значит, прямая и окружность имеют две общие точки, что противоречит условию. Таким образом, прямая l перпендикулярна радиусу OA.

Теорема доказана.

Рассмотрим следствия из данной теоремы.

Пусть через точку A проведены две прямые, касающиеся окружности $\omega(O;\ R)$ в точках C и B. Тогда отрезки AB и AC *называются отрезками касательных, проведенными из точки* A (рис. 5).

Следствие 1. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

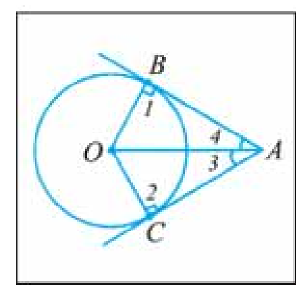


Рис. 5

Доказательство.

1) Пусть AB и AC — отрезки касательных, проведенные из точки A (см. рис. 5).

Для доказательства равенства $AB = AC$ рассмотрим треугольники ABO и ACO.

2) По свойству касательной $\angle 1 = 90°$ и $\angle 2 = 90°$, т. е. треугольники ABO и ACO — прямоугольные.

3) $\triangle ABO = \triangle ACO$, так как AO — общая гипотенуза, а катеты OB и OC равны как радиусы окружности. Отсюда следует, что $AB = AC$.

Следствие 1 доказано.

Из равенства треугольников ABO и ACO вытекает также, что $\angle 3 = \angle 4$. Таким образом, получаем еще одно следствие.

Следствие 2. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Теперь докажем признак, который позволяет устанавливать, в каком случае прямая касается окружности. Оказывается, для этого достаточно доказать, что прямая перпендикулярна радиусу и проходит через его конец, лежащий на окружности.

Теорема (*признак касательной*). Если прямая перпендикулярна радиусу окружности и проходит через его конец, лежащий на окружности, то она касается этой окружности.

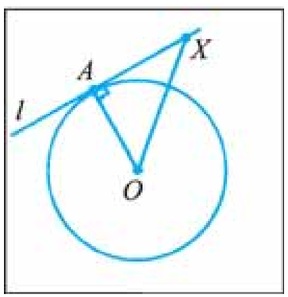


Рис. 6

Доказательство.

1) Пусть прямая l проходит через точку A окружности и перпендикулярна радиусу OA (рис. 6). Для доказательства того, что прямая l касается окружности, достаточно доказать, что она имеет с этой окружностью единственную общую точку.

2) Так как точка A лежит на окружности и прямая l проходит через точку A, то A — общая точка прямой l и окружности.

3) Других общих точек прямая l и окружность не имеют. Действительно, для любой точки $X \in l$ отрезок OX является наклонной, так как по условию $OA \perp l$. Следовательно, $OX > OA$, т. е. точка X не принадлежит окружности.

Таким образом, точка A — единственная общая точка прямой l и окружности, а, значит, l — касательная к окружности.

Теорема доказана.

Задача 1. Через точку A, находящуюся от центра O окружности на расстоянии 10 см, проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Вычислите площадь S_{ABOC} четырехугольника $ABOC$, если $AB + AC = 16$ см (рис. 7).

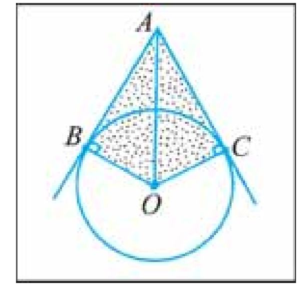


Рис. 7

Решение.

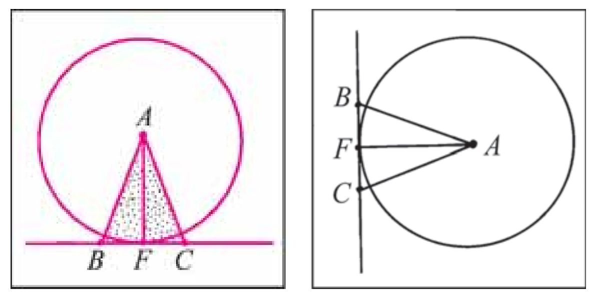
1) Площадь четырехугольника $ABOC$ равна сумме площадей треугольников ABO и ACO.

2) По свойству касательной $\angle OBA = \angle OCA = 90°$. Прямоугольные треугольники ABO и ACO равны по гипотенузе и катету (AO — общая, $OB = OC$). Значит, $S_{ABOC} = 2S_{ABO} = 2 \cdot \frac{1}{2} OB \cdot AB$.

3) Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны. Следовательно, $AB = AC = 8$ см. Теперь по теореме Пифагора вычисляем $OB = \sqrt{OA^2 - AB^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). Таким образом, $S_{ABOC} = OB \cdot AB = 6 \cdot 8 = 48$ (см^2).

Ответ: 48 см^2.

Задача 2. Вершина A равнобедренного треугольника ABC с основанием BC является центром окружности радиуса AF, где точка F — середина основания треугольника. Докажите, что прямая BC является касательной к окружности (рис. 8, *а, б*).



а) *б)*

Рис. 8

Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$, $F \in BC$, $BF = FC$, $\omega(A; AF)$.

Доказать: BC — касательная.

Доказательство.

1) Прямая BC проходит через конец F радиуса окружности $\omega(A; AF)$. Для доказательства того, что BC является касательной, достаточно доказать, что $BC \perp AF$.

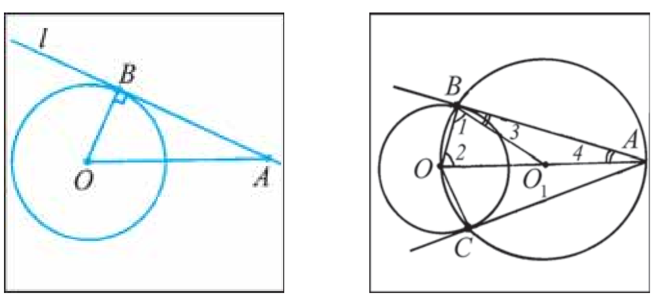
2) В равнобедренном треугольнике ABC отрезок AF — медиана, проведенная к его основанию. Следовательно, $AF \perp BC$. Таким образом, по признаку касательной прямая BC касается окружности $\omega(A; AF)$. Что и требовалось доказать.

Задача 3. Точка A лежит вне окружности $\omega(O; R)$. Постройте прямую, которая касается окружности и проходит через точку A.

Поиск решения.

1) *Пусть прямая l, проходящая через точку A, касается окружности $\omega(O; R)$ в точке B. Тогда по свойству касательной* $OB \perp AB$ (рис. 9, *а*). *Следовательно, для построения искомой касательной необходимо построить точку B на окружности $\omega(O; R)$ так, что $OB \perp AB$.*

2) *Рассмотрим окружность ω_1, диаметром которой является отрезок AO, т. е. $\omega_1(O_1; O_1A)$, где $O_1 \in OA$ и $OO_1 = O_1A$. Пусть B и C — точки пересечения окружностей $\omega(O; R)$ и $\omega_1(O_1; O_1A)$* (рис. 9, *б*). Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ *как углы при основании равнобедренных треугольников BO_1O и BO_1A. Так как $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180°$, то $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 90°$. Значит, $\angle OBA = 90°$, т. е. $OB \perp AB$.* Аналогично доказывается, что $OC \perp AC$. *По признаку касательной к окружности отсюда следует, что прямые AB и AC являются касательными. Теперь понятна последовательность необходимых построений.*



а) *б)*

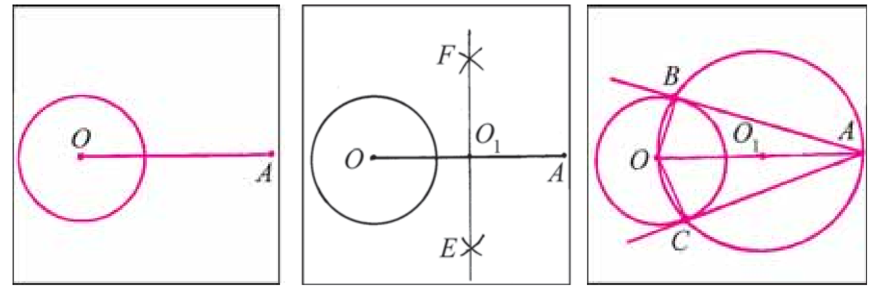
Рис. 9

Построение.

1) Проводим отрезок OA, соединяющий центр данной окружности и точку A (рис. 10, *а*).

2) Строим середину O_1 отрезка OA. Точка $O_1 = FE \cap AO$, F и E —

точки пересечения окружностей $\omega_2(O; r)$ и $\omega_3(A; r)$, где $r > \frac{1}{2} OA$ (рис. 10, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 10

3) Строим окружность $\omega_1(O_1; O_1A)$ (рис. 10, *в*).

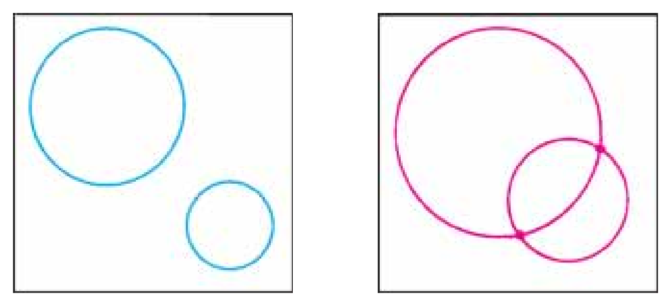
4) Через точку A и точки пересечения B и C данной и построенной окружностей проводим прямые AB и AC. Прямые AB и AC — искомые касательные к данной окружности.

Доказательство. По построению $\angle OBA = 90°$ и $\angle OCA = 90°$, так как каждый из этих углов опирается на диаметр, т. е. $AB \perp OB$ и $AC \perp OC$. Следовательно, по признаку касательной AB и AC — касательные.

3. Взаимное расположение двух окружностей. Рассмотрим вопрос о взаимном расположении двух окружностей. Возможны следующие случаи взаимного расположения двух различных окружностей:

1) *окружности не имеют общих точек* (в этом случае говорят, что они *не пересекаются* (рис. 11, *а*));

2) *окружности имеют две общие точки* (в этом случае говорят, что окружности *пересекаются* (рис. 11, *б*));

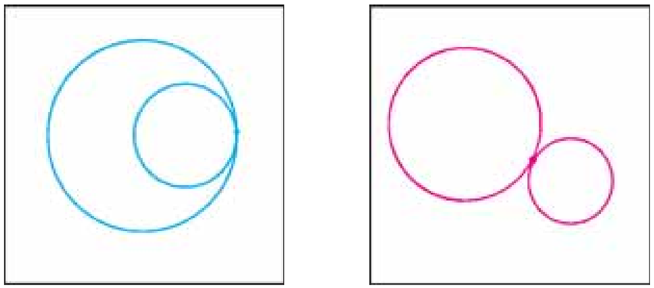


а) *б)*

Рис. 11

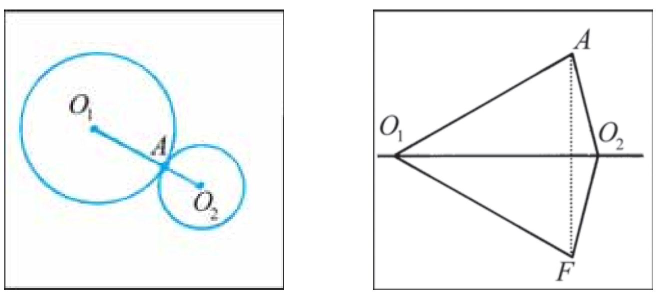
3) *окружности имеют только одну общую точку, и одна из окружностей лежит внутри круга, ограниченного другой окружностью* (в этом случае говорят, что *окружности касаются внутренним образом* (рис. 12, *а*));

4) *окружности имеют только одну общую точку, и ни одна из окружностей не лежит внутри круга, ограниченного другой окружностью* (в этом случае говорят, что они *касаются внешним образом* (рис. 12, *б*)).



а) Рис. 12 *б)*

Теорема 1 (*свойство окружностей, касающихся внешним образом*). Если две окружности ω_1 (O_1; R_1) и ω_2 (O_2; R_2) касаются внешним образом, то расстояние между их центрами равно сумме их радиусов, т. е. $O_1O_2 = R_1 + R_2$.



а) Рис. 13 *б)*

Доказательство.

1) Пусть окружности ω_1 (O_1; R_1) и ω_2 (O_2; R_2) касаются внешним образом в точке A (рис. 13, *а*).

2) Докажем, что точка A лежит на отрезке O_1O_2. Допустим, что точка A не лежит на отрезке O_1O_2. Понятно, что в случае внешнего касания точка A не может лежать на продолжении отрезка O_1O_2. Пусть точка касания A не лежит на прямой O_1O_2 (рис. 13, *б*). Тогда $O_1A = R_1$ и $O_2A = R_2$.

3) Пусть точка F симметрична точке A относительно прямой O_1O_2. Тогда $O_1F = O_1A = R_1$ и $O_2F = O_2A = R_2$, а, значит, точка F принадлежит каждой окружности. Таким образом, окружности ω_1 (O_1; R_1) и ω_2 (O_2; R_2) имеют две общие точки A и F, что противоречит условию их касания. Следовательно, точка касания A лежит на отрезке O_1O_2.

4) Докажем, что $O_1O_2 = R_1 + R_2$. Точка A лежит на отрезке O_1O_2, значит, $O_1O_2 = O_1A + AO_2 = R_1 + R_2$. Теорема доказана.

Справедливо обратное утверждение.

Теорема 2 (*условие касания окружностей внешним образом*). Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме их радиусов, то такие окружности касаются внешним образом.

Доказательство.

1) Пусть даны две окружности ω_1 (O_1; R_1) и ω_2 (O_2; R_2) и известно, что $O_1O_2 = R_1 + R_2$. Докажем, что окружности касаются внешним образом.

2) На отрезке O_1O_2 рассмотрим точку A такую, что $O_1A = R_1$. Тогда $AO_2 = O_1O_2 - O_1A = (R_1 + R_2) - R_1 = R_2$. Таким образом, точка A принадлежит каждой из данных окружностей.

3) Докажем, что окружности не имеют других общих точек. Действительно, на прямой O_1O_2 таких точек нет. Предположим, что существует точка X вне прямой O_1O_2, принадлежащая каждой окружности. Тогда $O_1X = R_1$ и $O_2X = R_2$. В треугольнике O_1O_2X сторона O_1O_2 равна сумме сторон O_1X и O_2X, что невозможно.

4) Таким образом, предположение о существовании еще одной точки, принадлежащей окружностям ω_1 (O_1; R_1) и ω_2 (O_2; R_2), приводит к противоречию. Следовательно, других общих точек, кроме точки A, не существует, т. е. окружности касаются.

5) Докажем, что окружности касаются внешним образом. Для любой точки F окружности ω_2 (O_2; R_2) выполняется условие $O_1F \geqslant |O_1O_2 - O_2F| = |R_1 + R_2 - R_2| = R_1$. Таким образом, либо точка F лежит вне окружности ω_1 (O_1; R_1), когда $O_1F > R_1$, либо принадлежит обеим окружностям, если $O_1F = R_1$. Но в этом случае точка F есть точка A касания окружностей. Следовательно, окружность ω_2 (O_2; R_2) расположена вне части плоскости, ограниченной окружностью ω_1 (O_1; R_1).

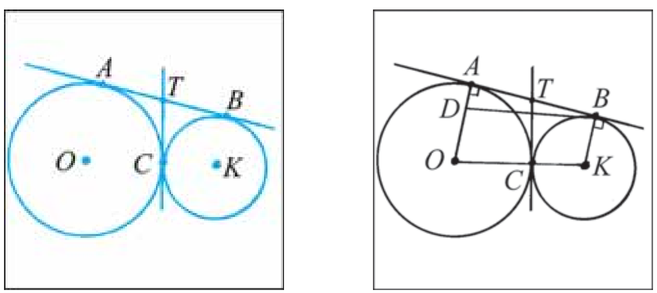
Аналогично можно доказать, что окружность $\omega_1(O_1;\ R_1)$ расположена вне части плоскости, ограниченной окружностью $\omega_2(O_2;\ R_2)$. Теперь доказано, что окружности $\omega_1(O_1;\ R_1)$ и $\omega_2(O_2;\ R_2)$ касаются внешним образом.

Можно доказать также следующую теорему.

Теорема 3 (*условие касания окружностей внутренним образом*). Две окружности касаются внутренним образом тогда и только тогда, когда расстояние между их центрами равно модулю разности их радиусов.

Другими словами, если окружности $\omega_1(O_1;\ R_1)$ и $\omega_2(O_2;\ R_2)$ касаются внутренним образом, то $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$. И наоборот, если выполняется равенство $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$, то окружности касаются внутренним образом.

Задача 4. Две окружности с центрами в точках O и K, радиусы которых равны 16 см и 9 см соответственно, касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведена общая касательная AB, где A и B — точки касания. Общая касательная, проведенная через точку C, пересекает касательную AB в точке T (рис. 14, *а*). Вычислите длину отрезка CT.



а) *б)*

Рис. 14

Решение.

Для решения задачи воспользуемся тем, что отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки, равны, а радиусы, проведенные в точку касания, перпендикулярны касательной. Учтем также, что окружности касаются внешним образом, а значит, расстояние между их центрами равно сумме их радиусов.

1) Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $TC = TA = TB$, т. е. $TC = \frac{1}{2}AB$. Значит, необходимо вычислить длину отрезка AB.

2) Проведем радиусы OA, KB и отрезок $BD \parallel OK$, $D \in OA$ (рис. 14, *б*). Так как радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то $\angle BAD = 90°$, т. е. треугольник BAD — прямоугольный. Следовательно, катет $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2}$.

3) Четырехугольник $ODBK$ — параллелограмм, значит, $DB = OK$. Так как окружности касаются внешним образом, то $OK = OC + CK = 16 + 9 = 25$ (см). Значит, $DB = 25$ см. Кроме того, $DA = OA - OD = OA - KB = 16 - 9 = 7$ (см). Теперь можем вычислить $AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ (см). Следовательно, $TC = \frac{1}{2}AB = 12$ (см).

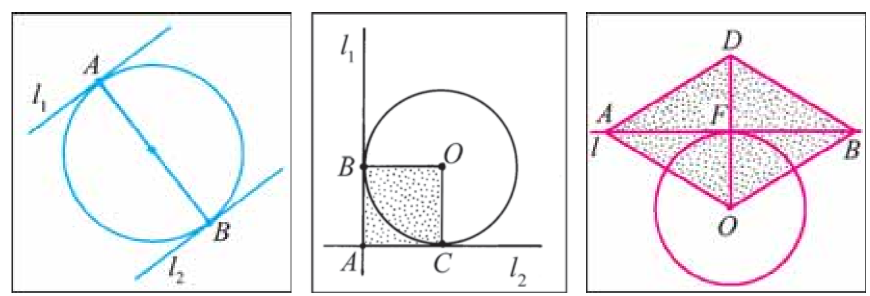
Ответ: 12 см.

Задачи к § 1

I

1. Отрезок AB — диаметр окружности. Прямые l_1 и l_2 касаются окружности в точках A и B (рис. 15, *а*). Докажите, что прямые l_1 и l_2 параллельные.

2. Угол между прямыми l_1 и l_2, которые пересекаются в точке A, — прямой. Окружность с центром в точке O касается данных прямых в точках B и C соответственно (рис. 15, *б*). Докажите, что четырехугольник $ABOC$ — квадрат.



а) *б)* *в)*

Рис. 15

3. Точка F касания прямой l и окружности с центром в точке O служит серединой отрезка AB, где A, B принадлежат прямой l (рис. 15, *в*). Точка D лежит на луче OF так, что $OF = FD$. Докажите, что четырехугольник $OADB$ — ромб.

4. Прямая l касается окружности с центром в точке S и радиусом, равным 4 см, в точке E. Точка A лежит на касательной так, что $\angle ESA = 60°$. Вычислите расстояние от точки A до центра окружности.

5. Точка F — точка касания прямой l и окружности ω, центром которой является точка O. Точка D лежит на касательной так, что $DO : OF = 2 : 1$. Докажите, что угол FOD равен 60°.

6. Точка F — точка касания окружности с центром в точке O и прямой l. Точка A лежит на касательной, и отрезок AO пересекает окружность в точке T, а отрезок FT равен радиусу окружности. Вычислите длину отрезка AF, если $FT = 2$ см.

7. Окружность с центром в точке O касается прямой l в точке A. Точка F лежит на прямой l и находится от точек O и A на расстоянии 25 см и 24 см соответственно. Вычислите длины отрезков, на которые отрезок OF делится окружностью.

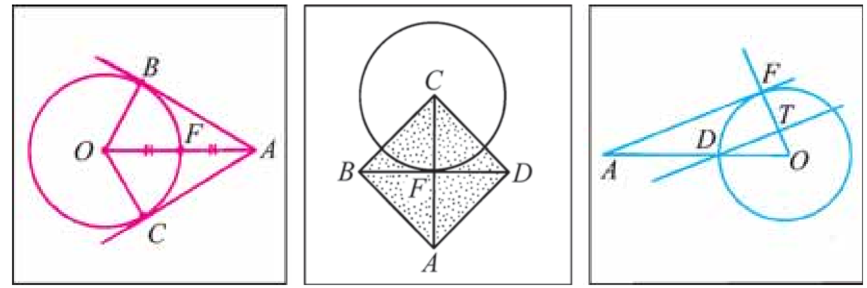
8. Точка A находится от центра окружности на расстоянии 12 см. Вычислите градусную меру угла между касательными, проведенными через точку A, если радиус окружности равен 6 см.

9. Отрезки AB и AC являются отрезками касательных к окружности с центром O, проведенными из точки A. Вычислите радиус окружности, если $AO = 8$ см, а $\angle BAC = 60°$.

10. Точка D — точка касания прямой l и окружности с центром в точке O. Точка C лежит на прямой l так, что площадь треугольника CDO равна 24 см^2. Вычислите расстояние между точками O и C, если радиус окружности равен 6 см.

11. Прямая l касается окружности с центром в точке O и радиусом, равным 5 см, в точке A. Точка B лежит на прямой l на расстоянии 13 см от центра окружности. Вычислите площадь треугольника AOB.

12. Через точку A, лежащую вне части плоскости, ограниченной окружностью с центром O, проведены прямые, которые касаются окружности в точках B и C. Точка F пересечения окружности и отрезка OA является его серединой (рис. 16, *а*). Докажите, что $\angle BOC = 120°$.



а) *б)* *в)*

Рис. 16

13. Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке F. Докажите, что окружность $\omega\,(C;\ CF)$ касается прямой BD (рис. 16, *б*).

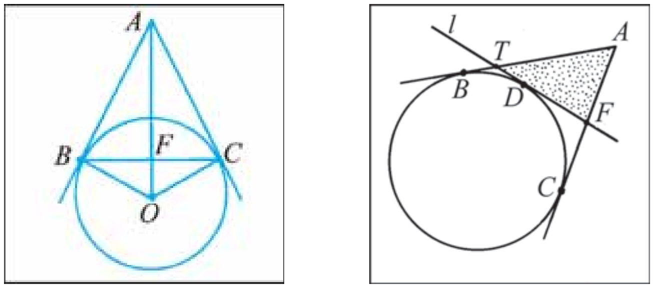
14. Через точку A к окружности с центром в точке O проведена касательная AF, где F — точка касания. Окружность пересекает отрезок AO в точке D, и через эту точку проведена прямая DT ($T \in OF$), параллельная касательной AF. Вычислите длину отрезка AO, если радиус окружности равен 6 см, а расстояние от центра окружности до прямой DT равно 2 см (рис. 16, *в*).

15. К окружности с центром в точке O и радиусом 1 см из точки A проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Вычислите градусную меру угла BAC, если длина отрезка касательной равна $\sqrt{3}$ см.

16. Из точки A к окружности с центром в точке O радиуса R проведены две касательные, угол между которыми равен 60°. Найдите длину хорды, соединяющей точки касания.

17. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Хорда BC пересекает отрезок OA в точке F. Вычислите радиус окружности, если длина хорды BC равна 8 см, а длина отрезка AF равна 16 см (рис. 17, *а*).

18. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные. Вычислите расстояния от точки A до точек касания, если



а) *б)*

Рис. 17

радиус окружности равен 5 см, а длина хорды, соединяющей точки касания, равна 8 см.

19. Из точки A к окружности проведены две касательные AB и AC, где B и C — точки касания. Через точку D этой окружности проведена еще одна касательная l, как показано на рисунке 17, *б*. Точки T и F — точки пересечения прямой l с касательными AB и AC соответственно. Найдите периметр треугольника ATF, если известно, что $AB = a$.

II

20. Точка A лежит вне окружности с центром в точке O на расстоянии 13 см от центра. Из точки A проведены две касательные, при этом расстояние между точками касания равно 12 см. Вычислите радиус окружности.

21. Из точки A к окружности с центром в точке O проведены две касательные, угол между которыми равен α. Найдите длину хорды, соединяющей точки касания, если $OA = a$.

22. Из некоторой точки проведены две касательные к окружности, которые образуют между собой угол 2α. Расстояние от центра окружности до хорды, которая соединяет точки касания, равно a. Найдите длины отрезков касательных.

23. Окружность радиуса 2 см касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная двух окружностей, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Вычислите радиус другой окружности, если длина отрезка AB равна 4 см.

24. Дана окружность радиуса R. Через точку A, лежащую вне окружности, к ней проведены две взаимно перпендикулярные касательные AC и AB, где B и C — точки касания. Между точками B и C на меньшей дуге взята точка F, и через нее проведена касательная, которая пересекает касательные AC и AB соответственно в точках E и T. Найдите периметр треугольника AET.

25. Две окружности касаются внешним образом в точке A и лежат по одну сторону от их общей касательной BC, где B и C — точки касания. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB = a$, $AC = b$.

26. Окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Докажите, что отрезок их общей касательной, концами которого служат точки касания, равен $2\sqrt{Rr}$.

27. Окружность радиуса R касается сторон угла, который равен 60°. Найдите радиус меньшей окружности, которая касается сторон угла и данной окружности.

28. Две окружности касаются внешним образом, а каждая из них касается сторон данного угла. Вычислите синус угла, если радиусы окружностей равны 2 см и 4 см.

29. Окружности касаются внешним образом и лежат по одну сторону от их общей касательной. Найдите отношение радиуса большей окружности к радиусу меньшей окружности, если данная касательная образует угол α с прямой, проходящей через центры окружностей.

30. Две окружности радиусов 9 см и 16 см касаются внешним образом в точке C. К окружностям проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Общая касательная, проведенная через точку C, пересекает прямую AB в точке T. Вычислите длину отрезка CT.

31. В данный угол вписаны три окружности, средняя из которых касается двух других окружностей радиусов R_1 и R_2. Найдите радиус средней окружности.

32. Постройте окружность, которая проходит через данную точку A и касается данной прямой l в данной на ней точке P.

33. Постройте окружность, которая касается сторон данного угла, причем одной из них — в данной на ней точке F.

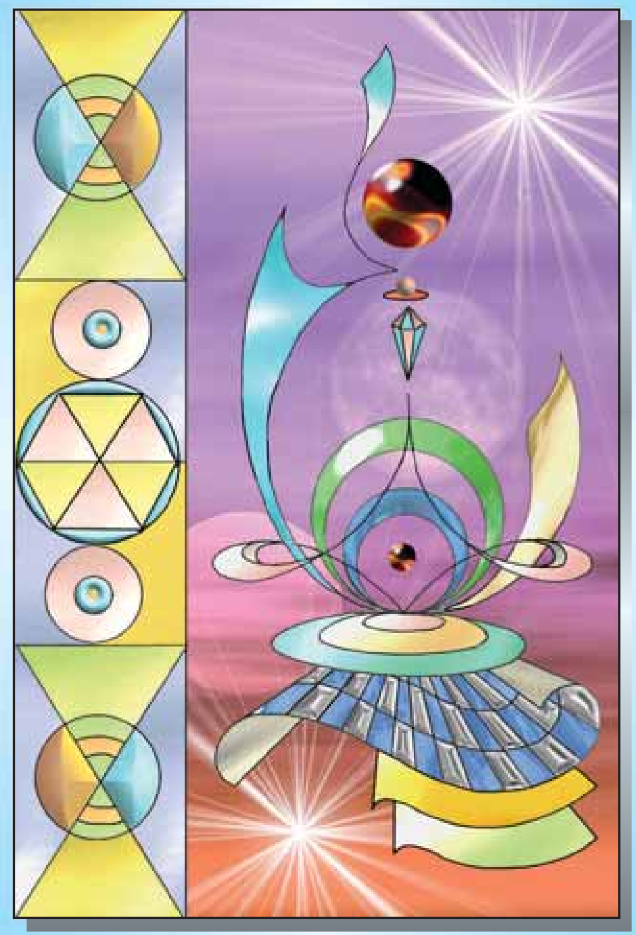
34. Постройте окружность, которая проходит через данную точку A и касается данной окружности в данной на ней точке F.

35. Постройте окружность, которая касается данной прямой l и данной окружности в данной на ней точке T.

36. Через точку пересечения двух данных окружностей проведите прямую так, чтобы часть ее, расположенная внутри окружностей, равнялась данному отрезку a.

37. Дан треугольник ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Постройте окружности с центрами соответственно в точках A, B, C так, чтобы они попарно касались друг друга внешним образом.

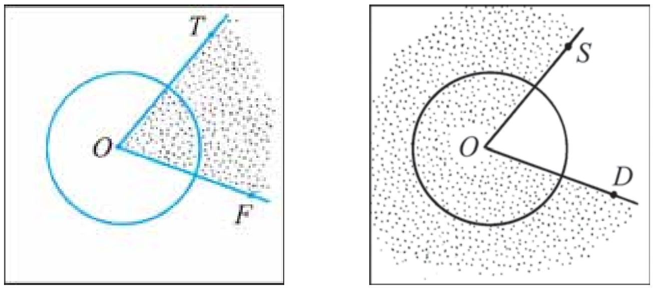
Центральные и вписанные углы



§ 2. Центральные и вписанные углы

1. Центральные углы. Градусная мера дуги окружности. В данном параграфе изучим понятия центрального и вписанного углов.

Определение. Центральным углом окружности называется угол с вершиной в центре этой окружности.



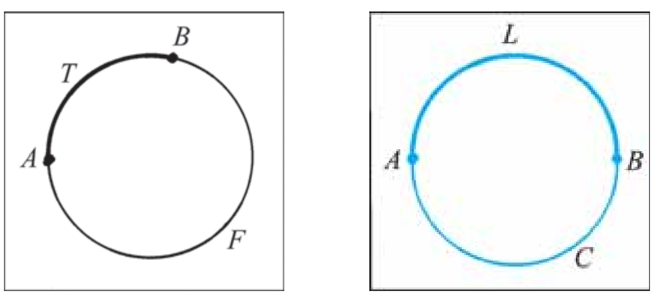
а) *б)*

Рис. 18

Например, на рисунке 18, *а* изображен центральный угол *TOF*, который меньше развернутого угла, а на рисунке 18, *б* — центральный угол *DOS* — больший развернутого угла.

Любые две различные точки *A* и *B* окружности служат концами двух дуг. Для различия этих дуг на каждой из них отмечается некоторая промежуточная точка. Например, если на дугах отмечены точки *F* и *T*, то в этом случае дуги обозначаются $\cup ATB$ и $\cup AFB$ и данная запись читается так: «дуга *ATB* и дуга *AFB*» (рис. 19, *а*). Если понятно, о какой из двух дуг идет речь, употребляется также обозначение $\cup AB$.

Дуга *AB* окружности называется *полуокружностью*, если ее концы служат концами диаметра этой окружности.



а) *б)*

Рис. 19

Например, на рисунке 19, *б* изображены полуокружности *ALB* и *ACB*.

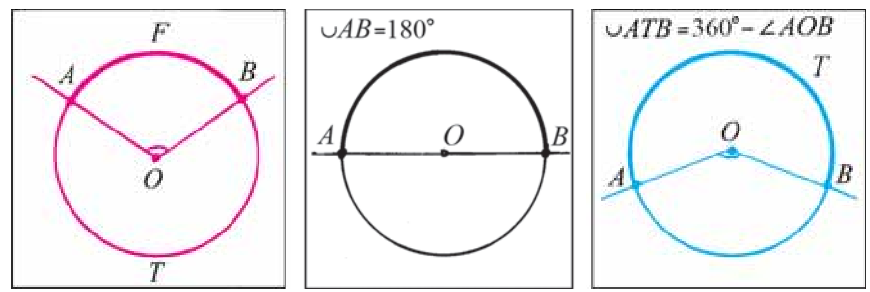
Пусть *A* и *B* не являются диаметрально противолежащими точками окружности с центром в точке *O*. Тогда лучи *OA* и *OB* служат сторонами двух центральных углов, один из которых меньше, а другой больше развернутого угла (рис. 20, *а*).

Дуга AB окружности $\omega(O; R)$ и центральный угол AOB, внутри которого лежит эта дуга, называются соответствующими.

Если дуга окружности лежит внутри соответствующего ей центрального угла, который меньше развернутого угла, то говорят, что эта дуга *меньше полуокружности*.

Если дуга окружности лежит внутри соответствующего ей центрального угла, который больше развернутого угла, то говорят, что дуга *больше полуокружности*.

Например, на рисунке 20, *а* изображены дуга *AFB*, которая меньше полуокружности, и дуга *ATB* — больше полуокружности.



а) *б)* *в)*

Рис. 20

Для сравнения дуг окружности вводится понятие *градусной меры* дуги окружности.

Определение. Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего ей центрального угла.

Градусная мера дуги *AB*, как и сама дуга, обозначается $\cup AB$.

Таким образом, если дуга *AB* окружности меньше полуокружности, а $\angle AOB$ — соответствующий ей центральный угол, то $\cup AB = \angle AOB$ (рис. 20, *а*).

Если дуга *AB* является полуокружностью, то ее градусная мера равна 180° (рис. 20, *б*).

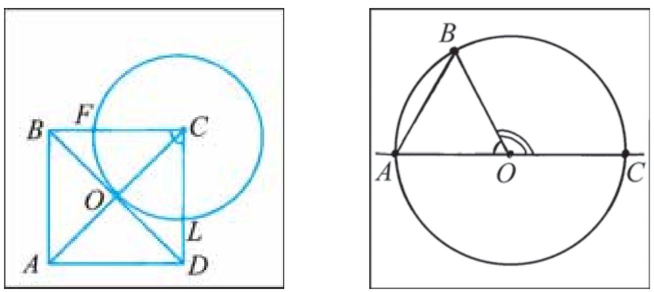
Градусная мера дуги ATB, которая больше полуокружности и дополняет дугу AB, меньшую полуокружности, до окружности, равна $360° - \angle AOB$, *где угол AOB соответствует дуге AB* (рис. 20, *в*).

Понятие градусной меры дуги позволяет определить понятие равенства дуг окружности.

Две дуги одной и той же окружности называются равными, если равны их градусные меры.

Если градусная мера дуги AB равна 33°, то пишут: $\cup AB = 33°$. Читают: «Градусная мера дуги AB равна 33°», или кратко «Дуга AB равна 33°».

Рассмотрим примеры. Пусть даны квадрат $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O, и окружность $\omega(C; CO)$ (рис. 21, *а*). Точки F и L — точки пересечения окружности со сторонами BC и DC соответственно. Тогда $\cup FOL = 90°$, а дуга FO, меньшая полуокружности, равна 45°. Градусная мера дуги FLO, которая больше полуокружности, равна $360° - \angle FCO = 360° - 45° = 315°$.



а) *б)*

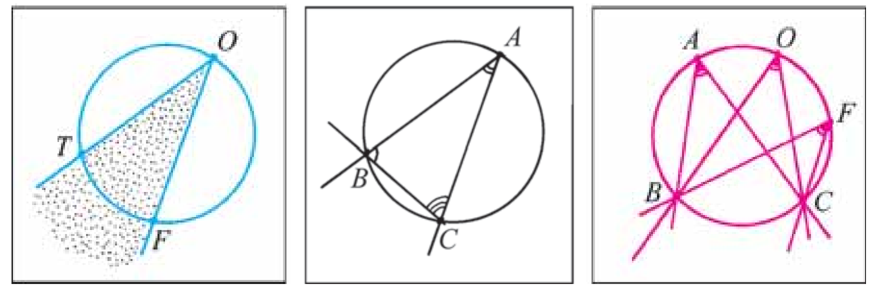
Рис. 21

Рассмотрим еще один пример. Пусть AB — хорда окружности, равная ее радиусу, а AC — диаметр окружности с центром в точке O (рис. 21, *б*). Тогда дуга AB, меньшая полуокружности, имеет градусную меру 60°, так как треугольник AOB — равносторонний, а, значит, соответствующий ей центральный угол AOB равен 60°. Дуга BC, меньшая полуокружности, равна 120°, так как соответствующий ей центральный угол BOC равен 120°. Дуга BAC больше полуокружности, следовательно, $\cup BAC = 360° - \angle BOC = 360° - 120° = 240°$.

2. Вписанные углы. Рассмотрим понятие вписанного угла.

Определение. Угол называется вписанным в окружность, если он меньше развернутого угла, вершина его лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность.

Например, на рисунке 22, *а* изображен вписанный угол TOF. Если точки A, B и C лежат на окружности, то каждый из углов ABC, BCA, CAB является вписанным (рис. 22, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 22

Пусть TOF — вписанный угол, при этом T и F — точки пересечения его сторон с окружностью, а TF — дуга, которая лежит внутри этого вписанного угла. В этом случае говорят, что *вписанный угол TOF опирается на дугу TF* (см. рис. 22, *а*). Например, на рисунке 22, *в* изображены вписанные углы BAC, BOC и BFC, которые опираются на одну и ту же дугу BC.

Теперь докажем теорему о вписанном угле.

Теорема 1 *(о вписанном угле)*. Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

Доказательство.

Пусть ABC — угол, вписанный в окружность с центром в точке O, который опирается на дугу AC. Докажем, что $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Рассмотрим три возможных случая.

Первый случай. Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC, например со стороной BC (рис. 23).

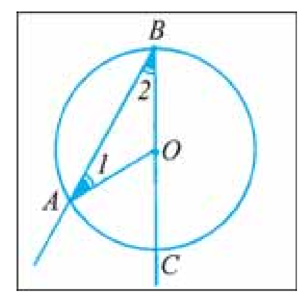


Рис. 23

1) Дуга AC меньше полуокружности, следовательно, $\angle AOC = \cup AC$.

2) Угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника AOB, значит, $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2$.

3) Так как углы при основании равнобедренного треугольника AOB равны, то $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle AOC$.

4) Так как $\angle ABC = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle AOC$ и $\angle AOC = \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Второй случай. Луч BO делит угол ABC на два угла.

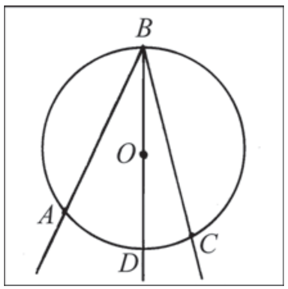


Рис. 24

1) Пусть D — точка пересечения луча BO и дуги AC (рис. 24). Тогда согласно доказанному в первом случае $\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \cup DC$.

2) Сложим эти равенства почленно:

$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \cup AD + \frac{1}{2} \cup DC$.

Таким образом, $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Третий случай. Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со стороной этого угла.

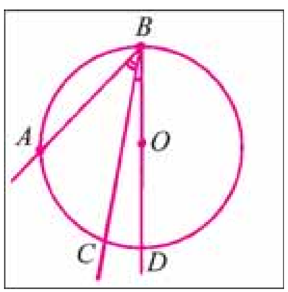


Рис. 25

1) Пусть D — точка пересечения луча BO с окружностью (рис. 25). Тогда согласно доказанному в первом случае

$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD$ и $\angle CBD = \frac{1}{2} \cup CD$.

2) Вычтем почленно из первого равенства второе:

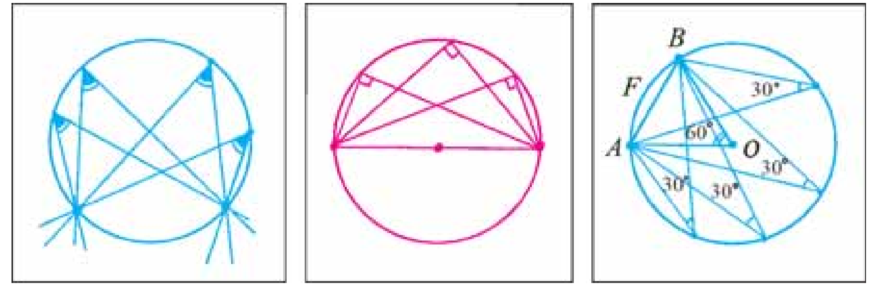
$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD$.

Так как $\angle ABD - \angle CBD = \angle ABC$ и $\frac{1}{2} \cup AD - \frac{1}{2} \cup CD = \frac{1}{2} \cup AC$, то $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Теорема доказана.

Из данной теоремы получаем следующие следствия.

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 26, *а*).



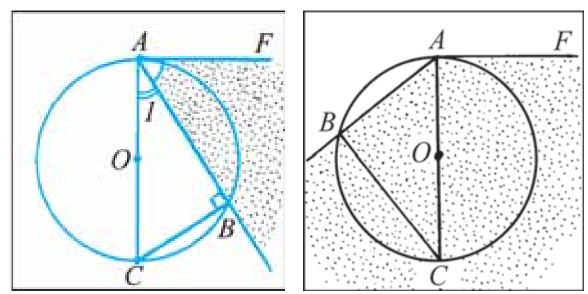
а) *б)* *в)*

Рис. 26

Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность, прямой (рис. 26, *б*).

Рассмотрим пример. Пусть хорда AB соединяет концы дуги AFB и равна радиусу окружности $\omega (O; R)$. Тогда каждый из вписанных углов, опирающихся на дугу AFB равен 30° (рис. 26, *в*). Действительно, центральный угол AOB равен 60°, значит, $\cup AB = 60°$. Каждый из указанных углов опирается на дугу AFB, следовательно, градусная мера каждого из них равна $\frac{1}{2} \cup AB = 30°$.

Теорема 2 (*об угле между хордой и касательной*). Градусная мера угла, сторонами которого служат касательная и хорда, равна половине градусной меры дуги, расположенной внутри этого угла.



а) *б)*

Рис. 27

Дано: $\omega (O; R)$,
AF — касательная,
AB — хорда.
Доказать:
$\angle FAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

Доказательство.

Первый случай. Пусть FAB — острый угол (рис. 27, *а*).

1) Проведем диаметр AC. Тогда вписанный угол CBA опирается на полуокружность, значит, по следствию 2 он равен 90°, т. е. $\angle CBA = 90°$.

2) Треугольник CBA — прямоугольный, следовательно, $\angle ACB = 90° - \angle 1$.

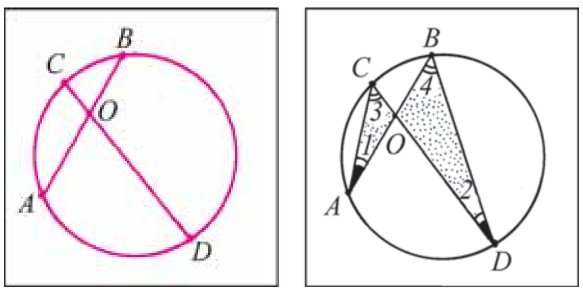
3) Так как диаметр AC перпендикулярен касательной FA, то $\angle FAB = 90° - \angle 1$. Таким образом, $\angle FAB = \angle ACB$. Так как угол ACB опирается на дугу AB, которая лежит внутри него, то $\angle ACB = \frac{1}{2} \cup AB$. Следовательно, $\angle FAB = \frac{1}{2} \cup AB$.

Второй случай. Пусть $\angle FAB$ — тупой (рис. 27, *б*), AC — диаметр. Тогда $\angle FAB = \angle BAC + \angle CAF = \frac{1}{2} \cup BC + \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} (\cup BC + \cup CA) = \frac{1}{2} \cup BCA$, но дуга BCA лежит внутри тупого угла FAB.

Теорема доказана.

3. Свойство пересекающихся хорд. Теорема о касательной и секущей.

Теорема 3 (*об отрезках пересекающихся хорд*). Если две хорды окружности пересекаются, то произведение длин отрезков одной хорды равно произведению длин отрезков другой хорды.



а) *б)*

Рис. 28

Дано: окружность, AB, CD — хорды, $O = AB \cap CD$ (рис. 28, *а*).

Доказать: $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Доказательство.

1) Проведем хорды AC и BD (рис. 28, *б*). Рассмотрим треугольники AOC и DOB.

2) Заметим, что $\angle 1 = \angle 2$, так как они вписанные и опираются на одну и ту же дугу CB. Кроме того, $\angle 3 = \angle 4$, так как они опираются на одну и ту же дугу AD.

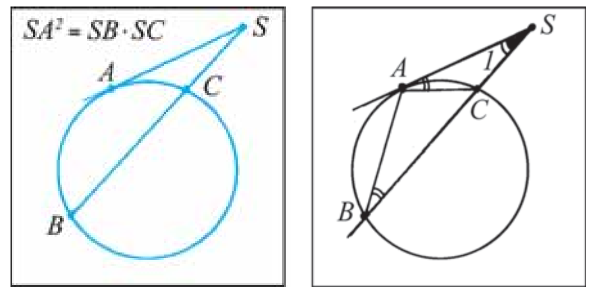
3) Треугольник AOC подобен треугольнику DOB по первому признаку подобия треугольников.

4) Из подобия треугольников AOC и DOB следует, что $\frac{CO}{OB} = \frac{AO}{OD}$. Значит, $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

Теорема доказана.

Пусть через точку S, лежащую вне окружности, проведена секущая, которая пересекает окружность в точках C и B и $SC < SB$. Тогда отрезок SB называется *отрезком секущей*, а отрезок SC — ее *внешней частью* (рис. 29, *а*).

Теорема 4 (*об отрезках секущей и касательной*). Если через точку, лежащую вне круга, ограниченного окружностью, провести к этой окружности касательную и секущую, то квадрат длины отрезка касательной равен произведению длин отрезков секущей и ее внешней части.



а) *б)*

Рис. 29

Дано: $\omega(O; R)$, SA — касательная, SB — секущая, SC — внешняя часть секущей (см. рис. 29, *а*).

Доказать: $SA^2 = SB \cdot SC$.

Доказательство.

1) Проведем хорды AC и AB (рис. 29, *б*).

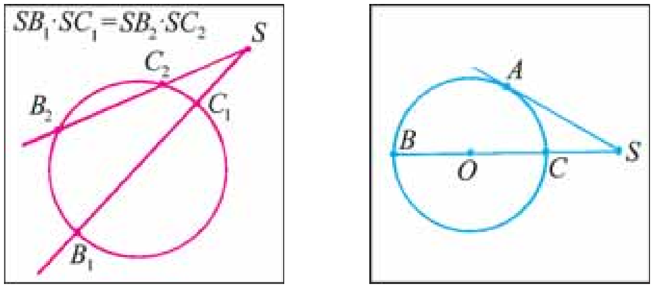
2) По теореме о вписанном угле $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$. Кроме того, в силу теоремы 2 имеем $\angle SAC = \frac{1}{2} \cup AC$. Значит, $\angle ABC = \angle SAC$.

3) Так как $\angle ABC = \angle SAC$ и $\angle 1$ — общий угол треугольников ASB и CSA, то эти треугольники подобны.

4) Из подобия треугольников ASB и CSA следует, что выполняется равенство $\frac{AS}{SC} = \frac{SB}{AS}$ или $AS^2 = SB \cdot SC$.

Теорема доказана. Из данной теоремы получаем следствие.

Следствие. Если из точки S к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность соответственно в точках C_1, B_1 и C_2, B_2, тогда $SB_1 \cdot SC_1 = SB_2 \cdot SC_2$ (рис. 30, *а*).



а) *б)*

Рис. 30

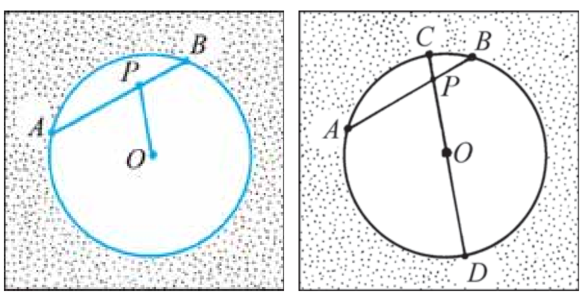
Задача 1. Пусть через точку S проведена секущая, которая проходит через центр окружности $\omega(O; R)$ и пересекает ее в точках C и B так, что $SC : CB = 1 : 2$. Найти длину отрезка SA касательной (рис. 30, *б*).

Решение.

По *теореме об отрезках секущей и касательной* имеем $SA^2 = SC \cdot SB$. Так как $SC : CB = 1 : 2$, $CB = 2R$, $SC = R$ и $SB = SC + CB = 3R$, то $SA^2 = SC \cdot SB = 3R \cdot R = 3R^2$ и $SA = \sqrt{3}R$.

Ответ: $\sqrt{3}R$.

Задача 2. Внутри круга радиуса 7,5 см взята точка P на расстоянии 6,5 см от его центра O. Через точку P проведена хорда AB, длина которой 9 см. Вычислите длины отрезков, на которые точка P делит хорду AB.



а) *б)*

Рис. 31

Дано: $\omega(O; R)$,
$R = 7{,}5$ см, $P \in AB$,
$PO = 6{,}5$ см,
$AB = 9$ см.
Найти:
BP и AP.

Решение.

Воспользуемся теоремой об отрезках пересекающихся хорд.

1) Пусть C и D — точки пересечения прямой OP с граничной окружностью данного круга (рис. 31, *б*). Тогда $CO = OD = 7{,}5$ см.

2) Пусть $PB = x$. Тогда $AP = 9 - x$ и по теореме об отрезках пересекающихся хорд имеем $AP \cdot PB = CP \cdot PD$, или $x(9 - x) = CP \cdot PD$.

3) Заметим, что $CP = CO - PO = 7{,}5 - 6{,}5 = 1$ (см). Кроме того, $PD = PO + OD = 7{,}5 + 6{,}5 = 14$ (см). Таким образом, $x(9 - x) = 14$. Отсюда находим, что $x = 2$ или $x = 7$. Следовательно, $PB = 2$ см и $AP = 7$ см или $PB = 7$ см и $AP = 2$ см.

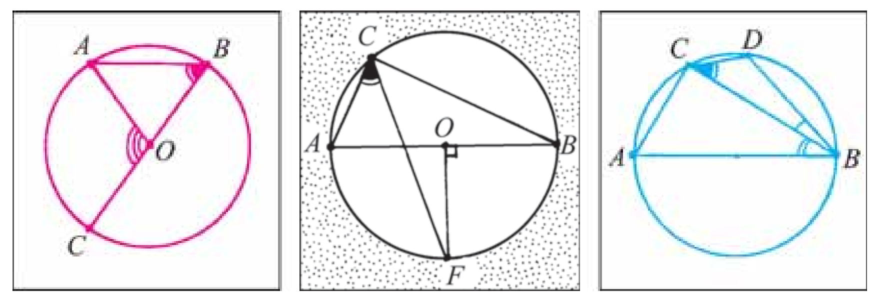
Ответ: 2 см, 7 см.

Задачи к § 2

I

1. Хорда AB равна радиусу окружности с центром в точке O, отрезок BC — диаметр этой окружности (рис. 32, *а*). а) Вычислите градусную меру вписанного угла ABC; б) Чему равна градусная мера центрального угла AOC?

2. В круге с центром в точке O проведен диаметр AB и перпендикулярный ему радиус OF (рис. 32, *б*). а) Вычислите градусную меру вписанного угла ACF. б) Докажите, что CF — биссектриса угла ACB.



а) *б)* *в)*

Рис. 32

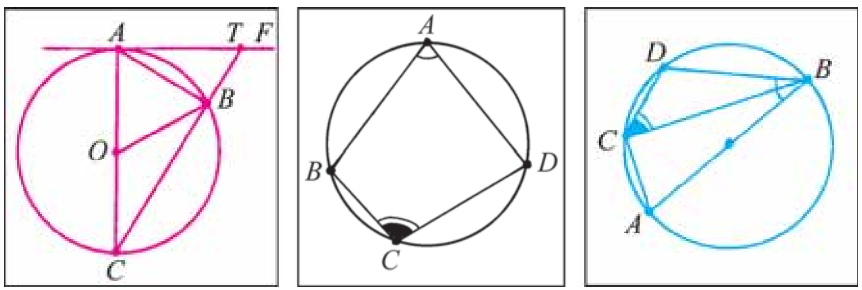
3. Отрезок AB — диаметр окружности, а точки C и D лежат на окружности по одну сторону от прямой AB так, что вписанные углы CBA и CBD равны 30° и 20° соответственно (рис. 32, *в*). Вычислите градусную меру вписанного угла DCB.

4. Хорда AB окружности с центром в точке O равна ее радиусу, отрезок CB — диаметр окружности, а OF — радиус окружности, который перпендикулярен хорде AB. Вычислите градусную меру вписанного угла FCB.

5. Отрезок AB — хорда окружности с центром в точке O и радиусом 10 см, центральный угол AOB равен 60°. Вычислите: а) длину хорды AB; б) расстояние от центра окружности до прямой AB.

6. Дуга CD окружности с центром в точке O равна 60°. Вычислите: а) расстояние от точки C до прямой DO, если радиус окружности равен 4 см; б) расстояние от точки C до точки, диаметрально противолежащей точке D.

7. Отрезок AC — диаметр окружности с центром в точке O, AF — касательная к окружности, A — точка касания, AB — хорда, равная радиусу окружности, $T = AF \cap CB$ (рис. 33, *а*). а) Чему равна градусная мера меньшей дуги с концами A и B? б) Докажите, что $BT : AT = 1 : 2$.



а) *б)* *в)*

Рис. 33

8. Точки A, B, C и D лежат на окружности так, что вписанный угол BAD равен 50° (рис. 33, *б*). а) Чему равна градусная мера дуги BCD? б) Вычислите градусную меру вписанного угла BCD.

9. AB — диаметр окружности. Точки C и D лежат на окружности по одну сторону от прямой AB так, что угол ABD равен 45° (рис. 33, *в*). Вычислите градусную меру угла DCB.

10. В окружности проведены две параллельные хорды CD и AB. Докажите, что градусные меры дуг, которые расположены между этими хордами, равны.

11. Хорды AB и AC окружности расположены так, что дуга AB имеет градусную меру 124°, а вписанный угол BAC равен 72°. Вычислите градусную меру дуги AC.

12. Отрезок AC — диаметр окружности радиуса R, хорда BC равна радиусу окружности. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямой CB с касательной к окружности, проведенной в точке A.

13. Точка F окружности находится от концов ее диаметра AB на расстоянии 9 см и 12 см. Вычислите радиус данной окружности.

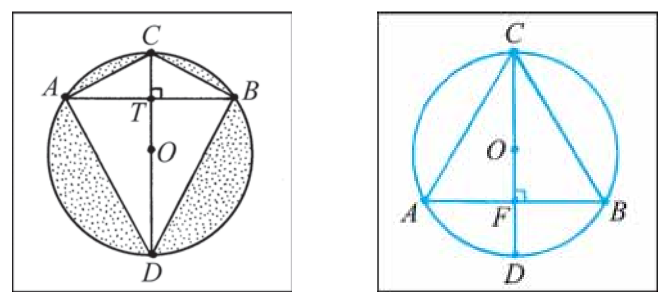
14. Расстояние от точки окружности до одного из концов ее диаметра равно 8 см, радиус окружности равен 5 см. Вычислите расстояние от данной точки до второго конца диаметра окружности.

15. Диаметром окружности служит катет AC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Вычислите расстояние от точки C до точки D пересечения окружности и гипотенузы, если $BD = 4$ см и $AD = 9$ см.

16. Длина перпендикуляра FD, проведенного из точки F окружности к ее диаметру AB, равна 24 см. Вычислите радиус окружности, если точка D делит диаметр AB в отношении $9 : 16$.

17. Хорда AB перпендикулярна диаметру CD круга и проходит через середину T радиуса CO (рис. 34, *а*). Найдите периметр четырехугольника $ACBD$, если радиус окружности равен R.

18. Диаметр CD перпендикулярен хорде AB и пересекается с ней в точке F, которая является серединой радиуса OD (рис. 34, *б*). а) Найдите длину хорды AB, если радиус окружности равен R. б) Докажите, что треугольник ABC является равносторонним.



а) *б)*

Рис. 34

19. На катете BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу в точке D. Вычислите площадь треугольника ABC, если $CD = 6$ см и $DB : DA = 4 : 9$.

20. Хорды AB и CD пересекаются в точке F, которая является серединой хорды AB. Вычислите длину хорды AB, если $CD = 25$ см и $FC = 9$ см.

21. Хорды AB и CD проходят через точку O, которая лежит внутри окружности и является серединой хорды AB. Вычислите длину хорды AB, если $CO = 9$ см и $CO : OD = 1 : 3$.

22. Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки F окружности к диаметру AB, $AO = a$, $BO = b$. Докажите, что $FO = \sqrt{ab}$, т. е. FO — среднее геометрическое a и b.

23. Точка F делит хорду AB в отношении $1 : 3$, считая от точки A, хорда CD пересекает хорду AB в точке F. Чему равна длина хорды AB, если $CD = 40$ см и $DF = 10$ см?

24. Точка O — основание перпендикуляра, проведенного из точки F окружности к ее диаметру AB. Вычислите радиус окружности, если $BO = 8$ см и $FO = 12$ см.

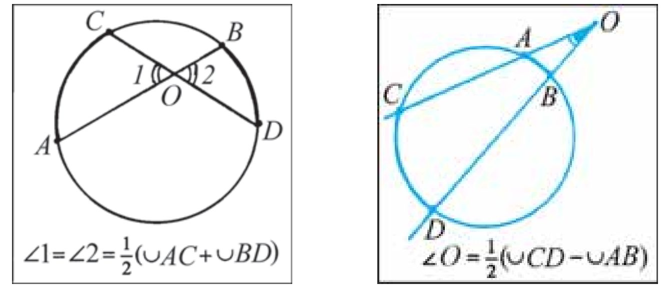
25. Точка O является точкой пересечения хорд AB и CD. Вычислите длины отрезков DO и OC, если $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, а отрезок DO на 5 см больше отрезка CO.

26. Диаметр AB и хорда CD окружности перпендикулярны и пересекаются в точке O. Вычислите радиус окружности, если $AO = 2$ см, длина хорды CD на 2 см меньше диаметра.

II

27. Хорды AB и DC окружности пересекаются в точке O (рис. 35, *а*). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

28. Из точки O, лежащей вне окружности, проведены две секущие, которые пересекают окружность в точках A, C и B, D (рис. 35, *б*). Докажите, что $\angle O = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup AB)$.



а) *б)*

Рис. 35

29. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Хорды AB и AC большей окружности пересекают меньшую окружность в точках O и F соответственно. Докажите, что $AO : OB = AF : FC$.

30. Две окружности касаются внутренним образом в точке A. Отрезок AB — диаметр большей окружности, а хорда BK большей окружности касается меньшей окружности в точке C. Найдите угол CAB, если угол CBA равен α.

31. Из точки B к окружности проведена прямая, которая касается окружности в точке A. В окружности проведена хорда AC так, что угол BAC является острым. Точка F лежит на дуге AC, расположенной внутри острого угла BAC так, что $\cup AF = \cup FC$. Найдите расстояние от точки F до касательной, если $d(F, AC) = a$.

32. Радиус окружности равен R. Из точки S, расположенной вне окружности, проведена секущая SB, которая проходит через центр O окружности так, что центр окружности лежит между точкой B пересечения секущей с окружностью и точкой S, SA — касательная к окружности, где A — точка касания. Найдите, на каком расстоянии точка S находится от центра окружности, если $SB = 3SA$.

33. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CA = 3$ см. Окружность, которая проходит через вершины B и C, пересекает прямую AC в точке K, лежащей на луче CA, а прямую AB — в точке T. Известно, что $AK = 1$ см. Вычислите длины отрезков KT и TA.

34. Вершины треугольника ABC лежат на окружности и $AB : BC = 2 : 3$, точка T делит дугу AC пополам, хорда BT пересекает сторону AC в точке F, а хорда DE проходит через точку F, $DF = 8$ см и $FE = 12$ см. Вычислите длину стороны AC.

35. Стороны SO и SF угла OSF пересекают окружность соответственно в точках A, B и C, D. Градусные меры дуг AC, CD, DB и BA в указанном порядке находятся в отношении $4 : 6 : 10 : 16$. Вычислите градусную меру угла OSF.

36. Через точку S внутри окружности проведены две прямые l_1 и l_2, которые пересекают окружность соответственно в точках C, D и A, B. Градусные меры дуг AC, CB, BD и DA в указанном порядке находятся в отношении $2 : 4 : 6 : 8$. Вычислите градусные меры углов с вершиной S.

Замечательные точки треугольника

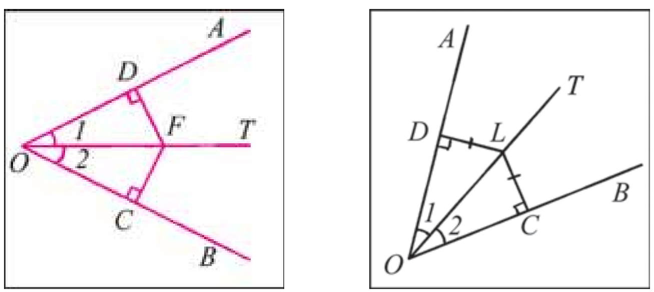
§ 3. Замечательные точки треугольника

Ранее мы уже отмечали следующие свойства: *медианы треугольника пересекаются в одной точке*; *биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке*; *высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке*.

Теорема о свойстве точки пересечения медиан была доказана в девятом классе. Сейчас докажем теоремы о свойствах биссектрис и высот треугольника.

1. Теорема о точке пересечения биссектрис треугольника. Предварительно докажем одно свойство биссектрисы угла.

Теорема 1 *(о свойстве биссектрисы угла)*. Каждая точка биссектрисы угла, меньше развернутого, равноудалена от его сторон. Каждая точка указанного угла, равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.



а) *б)*

Рис. 36

Доказательство.

I. *Докажем, что каждая точка биссектрисы угла, который меньше развернутого, равноудалена от его сторон.*

1) Пусть OT — биссектриса $\angle AOB$, т. е. $\angle 1 = \angle 2$ и F — произвольная точка биссектрисы. Проведем перпендикуляры FC и FD к прямым BO и AO соответственно и докажем, что $FC = FD$ (рис. 36, *а*).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольники OFD и OFC. Эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу (OF — общая гипотенуза, $\angle 1 = \angle 2$).

3) Из равенства треугольников OFD и OFC следует, что $FC = FD$. Что и требовалось доказать.

II. *Докажем, что если точка равноудалена от сторон угла меньше развернутого, то она лежит на его биссектрисе.*

1) Пусть точка L равноудалена от сторон угла AOB, т. е. перпендикуляры LD и LC, проведенные к сторонам угла, равны. Докажем, что OL — биссектриса угла AOB (рис. 36, *б*).

2) Рассмотрим прямоугольные треугольники ODL и OCL. Эти треугольники равны по гипотенузе и катету (OL — общая гипотенуза, $LD = LC$).

3) Из равенства треугольников ODL и OCL следует, что $\angle 1 = \angle 2$, т. е. OL — биссектриса угла AOB. Что и требовалось доказать.

Теорема 2 *(о точке пересечения биссектрис)*. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство.

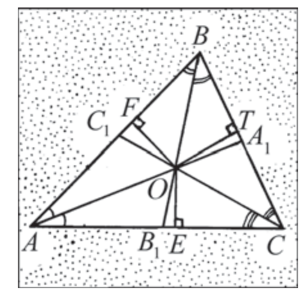


Рис. 37

1) Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC. Докажем, что они пересекаются в одной точке (рис. 37).

Обозначим буквой O точку пересечения биссектрис AA_1 и BB_1. Проведем из точки O перпендикуляры OF, OT и OE соответственно к прямым AB, BC и AC.

2) По теореме о свойстве биссектрисы угла выполняются равенства $OE = OF$ и $OF = OT$. Отсюда следует, что $OE = OT$.

3) Равенство $OE = OT$ означает, что точка O равноудалена от сторон угла ACB. Следовательно, *по теореме о свойстве биссектрисы угла* следует, что точка O лежит на биссектрисе угла ACB. Иначе говоря, биссектриса CC_1 проходит через точку O. Таким образом, все три биссектрисы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ACB пересекаются в точке O.

Теорема доказана.

2. Теорема о точке пересечения прямых, содержащих высоты треугольника. Ранее было введено понятие серединного перпендикуляра к отрезку и доказана теорема о серединном перпендикуляре: *каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов. И обратно: если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре к этому отрезку.*

Воспользуемся указанными свойствами для доказательства следующей теоремы.

Теорема 3 ***(о точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника).*** **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**

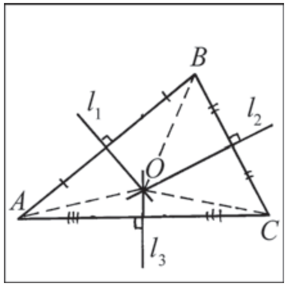


Рис. 38

Доказательство.

Пусть l_1, l_2 и l_3 — серединные перпендикуляры к сторонам AB, BC и AC треугольника ABC соответственно (рис. 38). Докажем что серединные перпендикуляры l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

1) Обозначим буквой O точку пересечения серединных перпендикуляров l_1 и l_2. Тогда по теореме о серединном перпендикуляре справедливы равенства $OA = OB$ (так как l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB) и $OB = OC$ (так как l_2 — серединный перпендикуляр к отрезку BC). Отсюда следует, что $OA = OC$.

2) Равенство $OA = OC$ означает, что точка O равноудалена от вершин A и C. Значит, по теореме о серединном перпендикуляре точка O лежит на серединном перпендикуляре к стороне AC. Таким образом, все три серединных перпендикуляра l_1, l_2 и l_3 пересекаются в одной точке.

Теорема доказана.

Воспользуемся данной теоремой для доказательства свойства высот треугольника.

Теорема 4 ***(о точке пересечения прямых, на которых лежат высоты треугольника).*** **Прямые, на которых лежат высоты треугольника, пересекаются в одной точке.**

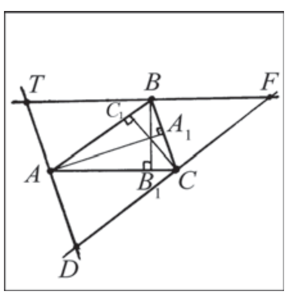


Рис. 39

Доказательство.

1) Пусть ABC — произвольный треугольник и AA_1, BB_1 и CC_1 — его высоты (рис. 39). Докажем, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

2) Проведем через вершины A, B и C прямые, параллельные соответственно сторонам BC, AC и AB. Пусть T, F и D — точки их пересечения.

3) Докажем, что точки A, B и C являются соответственно серединами сторон TD, TF и FD треугольника TFD. Например, докажем, что точка C — середина стороны DF. Так как четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = DC$. Так как $ABFC$ параллелограмм, то $AB = CF$. Таким образом, $DC = CF$.

4) Аналогично доказывается, что $AT = AD$ и $TB = BF$. По условию $AA_1 \perp BC$, а по построению $TD \parallel BC$, следовательно, $AA_1 \perp TD$. Аналогично, $BB_1 \perp TF$ и $CC_1 \perp DF$. Значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника TFD. Следовательно, они пересекаются в одной точке.

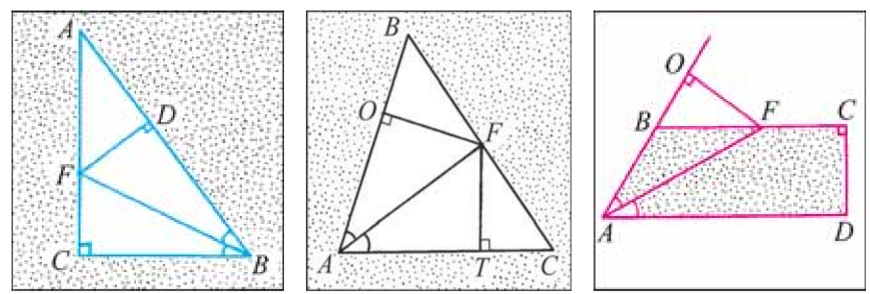
Теорема доказана.

Точка пересечения медиан, *точка пересечения биссектрис* и *точка пересечения высот* называются *замечательными точками треугольника.*

Заметим, что если треугольник остроугольный, то пересекаются в одной точке сами его высоты, а если треугольник тупоугольный, то пересекаются в одной точке прямые, на которых лежат высоты.

Задачи к § 3

1. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведена биссектриса BF. Длина перпендикуляра FD, проведенного к прямой AB из точки F, равна 4 см (рис. 40, *а*). Вычислите длину отрезка FC.



а) *б)* *в)*

Рис. 40

2. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C, отрезок AT — биссектриса этого треугольника, TK — перпендикуляр, проведенный из точки T к его гипотенузе. Вычислите длину отрезка BK, если $AC = 7$ см и $AB = 10$ см.

3. Отрезок AF — биссектриса треугольника ABC. Высота FO треугольника ABF равна 2 см (рис. 40, *б*). Может ли высота FT треугольника AFC быть равной 2,5 см?

4. $ABCD$ — прямоугольная трапеция, AF — биссектриса угла BAD, FO — перпендикуляр, проведенный из точки F к прямой AB (рис. 40, *в*). Докажите, что отрезок OF равен высоте трапеции.

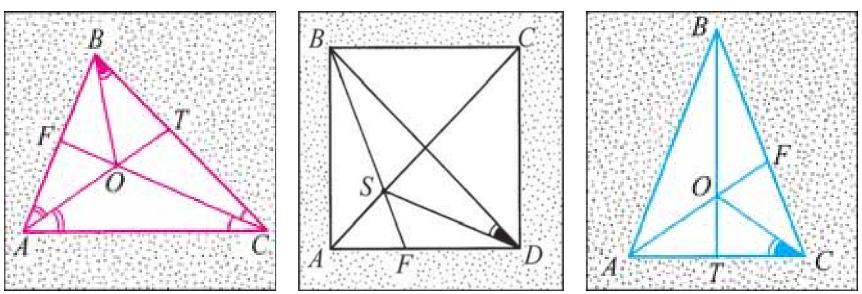
5. В треугольнике ABC с прямым углом при вершине C проведена биссектриса CF. Вычислите расстояния от точки F до прямых AC и BC, если $CF = 4\sqrt{2}$ см.

6. Отрезок AO — биссектриса прямоугольного треугольника ABC с прямым углом при вершине C. Вычислите площадь треугольника AOB, если $CO = 3$ см, $AB = 12$ см.

7. Биссектрисы BF и AT равнобедренного треугольника ABC, основание которого BC, пересекаются в точке O. Вычислите длину отрезка OT, если $AB = 14$ см, а площадь треугольника AOB равна 35 см^2.

8. Биссектрисы AF и BK треугольника ABC пересекаются в точке O. Верно ли, что $\angle OCA = \angle OCB$?

9. В треугольнике ABC биссектрисы CF и AT пересекаются в точке O (рис. 41, *а*). Вычислите величину угла ABO, если $\angle OAC = 31°$, $\angle OCB = 22°$.



а) *б)* *в)*

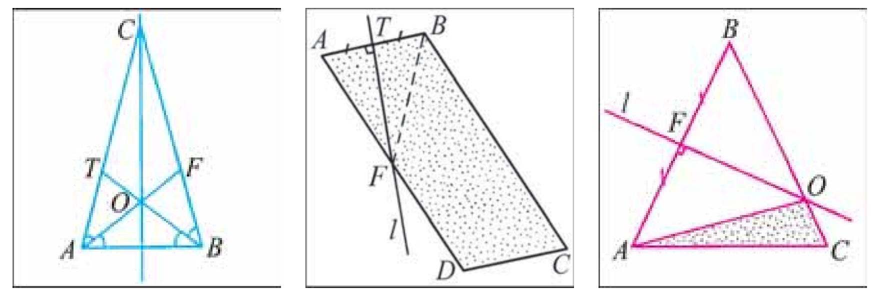
Рис. 41

10. $ABCD$ — квадрат. Биссектриса BF угла ABD пересекает диагональ AC квадрата в точке S (рис. 41, *б*). Вычислите градусную меру угла SDB.

11. ABC — равнобедренный треугольник, основание которого — отрезок AC. Биссектриса AF и высота BT пересекаются в точке O (рис. 41, *в*). Вычислите градусную меру угла OCT, если $\angle ABC = 40°$.

12. Биссектрисы AF и BT углов при основании равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 42, *а*). Докажите, что прямая CO перпендикулярна основанию AB данного треугольника.

13. Серединный перпендикуляр l к стороне AB параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону AD в точке F, которая служит ее серединой (рис. 42, *б*). Вычислите расстояние от вершины B до точки F, если $BC = 18$ см.



а) *б)* *в)*

Рис. 42

14. Серединный перпендикуляр l к боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону BC в точке O (рис. 42, *в*). Докажите, что периметр треугольника AOC равен $AB + AC$.

15. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине C. Серединный перпендикуляр l к гипотенузе AB пересекает катет AC в точке F так, что $AF = 10$ см. Вычислите периметр треугольника FBC, если $BC = 8$ см.

16. На медиане BF треугольника ABC постройте точку, равноудаленную от вершин B и C.

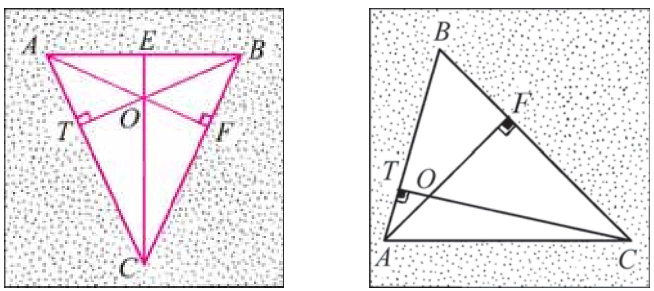
17. Дана прямая l и две точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой l. Постройте равнобедренный треугольник, основанием которого является отрезок AB, а вершина лежит на прямой l.

18. Постройте прямоугольный треугольник по катету a и сумме s другого катета и гипотенузы.

19. Высоты CF и AT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ABO = \angle ACO$.

20. Высоты AF и BT, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке O и $E = CO \cap AB$ (рис. 43, *а*). Докажите, что отрезок CE — медиана треугольника ABC.

21. Высоты AF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 43, *б*). Известно, что $AT : FC = 1 : 2$. Вычислите длину отрезка OC, если $AO = 4$ см.

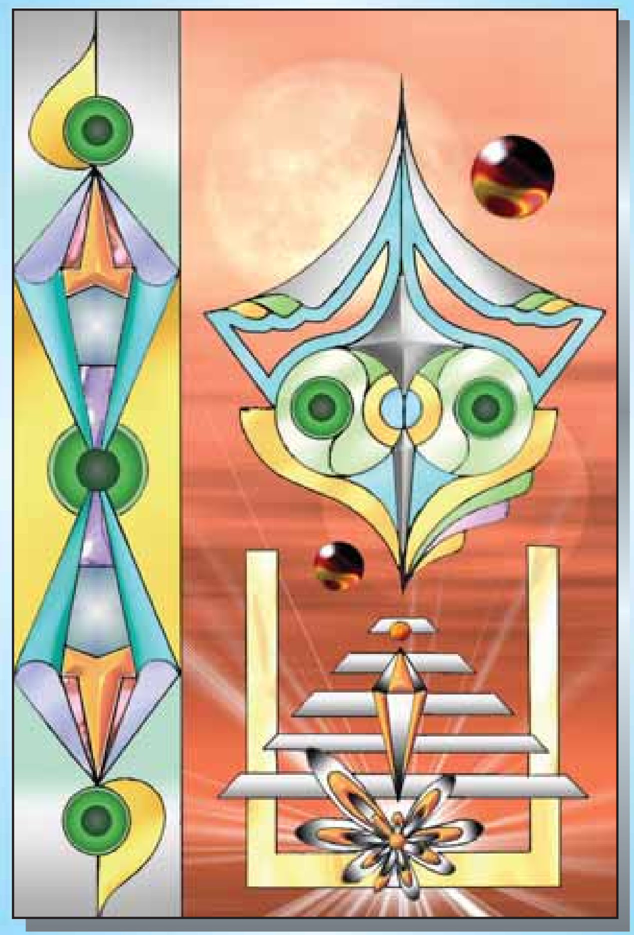


а) *б)*

Рис. 43

22. Высоты AF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Вычислите длину высоты треугольника AOC, проведенной из вершины O, если $AO = BF = 8$ см, $OF = 6$ см.

Вписанные и описанные треугольники

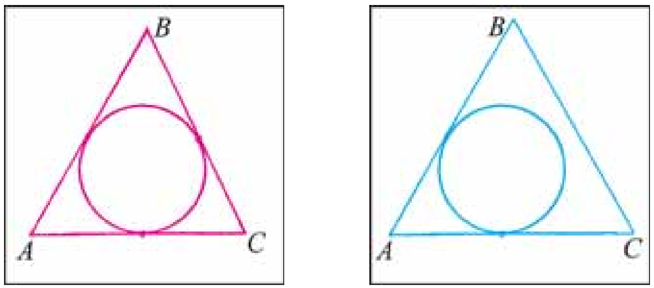


§ 4. Вписанные и описанные треугольники

1. Окружность, вписанная в треугольник. Рассмотрим понятия окружности, вписанной в треугольник.

Определение. Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех сторон треугольника. В этом случае треугольник называется описанным около окружности.

Например, на рисунке 44, *а* изображена окружность, вписанная в треугольник ABC. Окружность, которая изображена на рисунке 44, *б*, не является вписанной в треугольник ABC, так как она не касается стороны BC.



а) *б)*

Рис. 44

Следующая теорема дает ответ на вопрос о существовании окружности, вписанной в треугольник.

Теорема ***(о существовании окружности, вписанной в треугольник).*** **В любой треугольник можно вписать единственную окружность.**

Доказательство.

I. *Докажем, что в треугольник можно вписать окружность.*

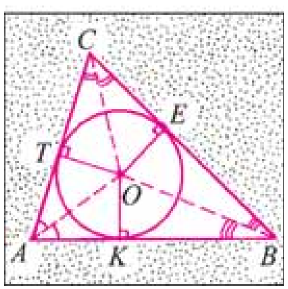


Рис. 45

1) Пусть ABC — произвольный треугольник, O — точка пересечения его биссектрис (рис. 45).

2) Проведем из точки O перпендикуляры OK, OE и OT к сторонам AB, BC и AC соответственно.

3) По теореме о биссектрисе угла точка O равноудалена от сторон треугольника, следовательно, $OK = OE = OT$. Таким образом, окружность с центром в точке O и радиусом, равным отрезку OK, проходит через точки K, E и T.

4) Стороны AB, BC и AC треугольника касаются этой окружности в точках K, E и T, так как они перпендикулярны соответственно радиусам OK, OE и OT. Следовательно, окружность с центром в точке O радиуса OK является вписанной в треугольник ABC. Существование вписанной окружности доказано.

II. *Докажем, что такая окружность единственная.*

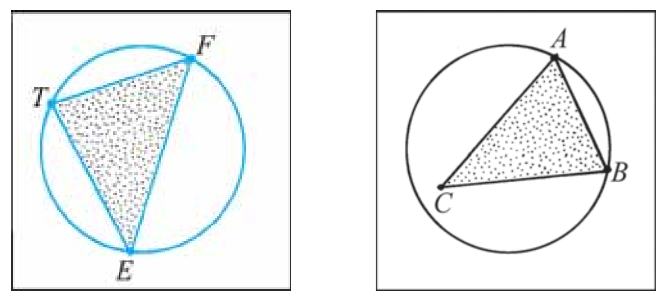
Допустим, что в треугольник можно вписать две окружности. Тогда центр каждой из окружностей равноудален от сторон треугольника, а следовательно, совпадает с точкой O пересечения биссектрис треугольника; ее радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника. Таким образом, эти окружности совпадают.

Теорема доказана.

2. Окружность, описанная около треугольника. Рассмотрим понятие окружности, описанной около треугольника.

Определение. Окружность называется описанной около треугольника, если все его вершины лежат на этой окружности. В этом случае треугольник называется вписанным в окружность.

Например, на рисунке 46, *а* изображена окружность, которая является описанной около треугольника TFE. Окружность, которая изображена на рисунке 46, *б*, не является описанной около треугольника ABC, так как вершина C не лежит на окружности.



а) *б)*

Рис. 46

Докажем теорему о существовании описанной около треугольника окружности.

Теорема ***(о существовании окружности, описанной около треугольника).*** **Около любого треугольника можно описать единственную окружность.**

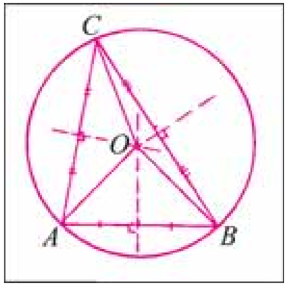


Рис. 47

Доказательство.

I. *Докажем, что около треугольника можно описать окружность.*

1) Пусть ABC — произвольный треугольник, O — точка пересечения серединных перпендикуляров к его сторонам (рис. 47).

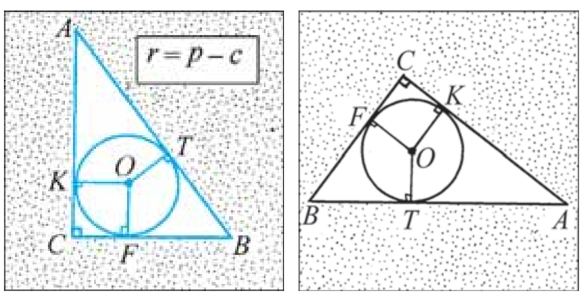
2) Так как точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от его концов, то $OA = OB = OC$. Таким образом, окружность с центром в точке O радиуса OA проходит через все вершины треугольника ABC, а значит, является описанной около этого треугольника.

II. *Докажем, что такая окружность единственная.*

Предположим, что около треугольника можно описать еще одну окружность. Тогда ее центр равноудален от вершин треугольника, а следовательно, совпадает с точкой O пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника; ее радиус равен расстоянию от точки O до вершин треугольника. Таким образом, окружности совпадают.

Теорема доказана.

Задача 1. Докажите, что радиус r вписанной в прямоугольный треугольник окружности находится по формуле $r = p - c$, где p — полупериметр прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза.



а) *б)*

Рис. 48

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90°$, $AB = c$, r — радиус вписанной окружности, p — полупериметр.

Доказать: $r = p - c$.

Доказательство.

1) Пусть K, T, F — точки касания окружности со сторонами треугольника, O — центр вписанной окружности (рис. 48, *а, б*).

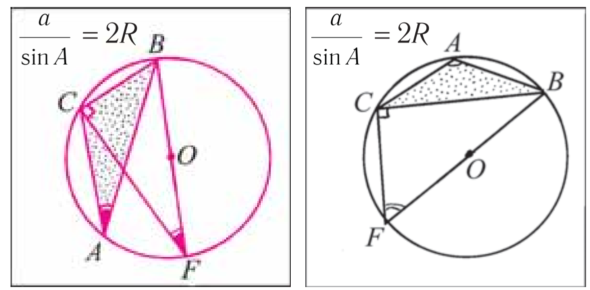
Тогда четырехугольник $CKOF$ — квадрат (так как $\angle OKC = \angle KCF = \angle CFO = 90°$, $CK = CF$).

2) Отрезки касательных, проведенные из одной точки, равны, следовательно, $AT = AK = AC - r$ и $BT = BF = BC - r$.

3) Так как $AT + BT = c$, то $(AC - r) + (BC - r) = c$. Таким образом, $r = \frac{AC + BC - c}{2}$ или $r = \frac{AC + BC + c}{2} - c = p - c$.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC выполняется равенство $\frac{a}{\sin A} = 2R$, где a — сторона, лежащая против угла A, а R — радиус описанной окружности.



а) *б)*

Рис. 49

Дано: $\triangle ABC, BC = a$, R — радиус описанной окружности.

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Доказательство.

Пусть около треугольника ABC описана окружность. Проведем диаметр BF этой окружности. Возможны два случая.

Первый случай. Углы A и F опираются на одну дугу (рис. 49, *а*). Тогда $\angle A = \angle F$. В прямоугольном треугольнике BCF $\sin F = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{2R}$, а значит, $\sin A = \frac{a}{2R}$.

Второй случай. Углы A и F опираются на дополнительные дуги, т. е. $\angle A + \angle F = 360° : 2 = 180°$ (рис. 49, *б*). Тогда $\angle F = 180° - \angle A$. В прямоугольном треугольнике BCF $\sin F = \frac{BC}{BF} = \frac{a}{2R}$. Но так как $\sin F = \sin(180° - \angle A)$, то в этом случае также $\sin A = \frac{a}{2R}$.

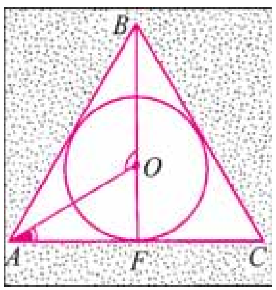
Третий случай. Если треугольник BAC прямоугольный с прямым углом при вершине A, то формула верна, так как в этом случае $\sin A = 1$ и сторона, лежащая против угла A, является диаметром окружности, т. е. $a = 2R$.

Что и требовалось доказать.

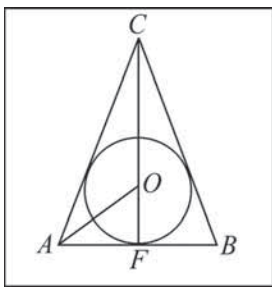
Задачи к § 4

I

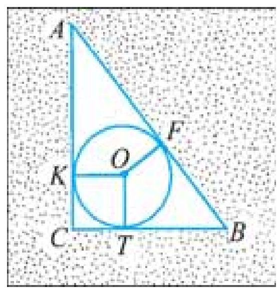
1. ABC — равносторонний треугольник, O — центр вписанной в него окружности, $F = BO \cap AC$ (рис. 50, *а*). а) Верно ли, что $\angle OAF = 30°$? б) Вычислите градусную меру угла BOA. в) Вычислите высоту треугольника ABC, если радиус вписанной в него окружности равен 2 см.



а)



б)



в)

Рис. 50

2. Вычислите радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, если длина его стороны равна $4\sqrt{3}$ см.

3. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр треугольника.

4. Точка O — центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник ABC, основание которого AB, $F = AB \cap CO$ (рис. 50, *б*). Найдите отношение $CO : OF$, если $CF = 4$ см и $AB = 6$ см.

5. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, если длина его основания равна 10 см, а боковая сторона — 13 см.

6. Вычислите длину основания равнобедренного треугольника, если его периметр равен 32 см, а центр вписанной окружности делит высоту, проведенную к основанию, в отношении 5 : 3, считая от вершины.

7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C, касается сторон треугольника в точках F, T и K (рис. 50, *в*). Вычислите длину гипотенузы треугольника, если $AK + TB = 10$ см.

8. В прямоугольный треугольник вписана окружность, радиус которой равен 2 см. Вычислите периметр треугольника, если длина его гипотенузы равна 13 см.

9. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписана окружность. Вычислите радиус этой окружности, если длина катета, прилежащего к углу в 60°, равна $2\sqrt{3}$ см.

10. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 8 см и 15 см. Вычислите расстояние от вершины прямого угла до центра вписанной в этот треугольник окружности.

11. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка ее касания с гипотенузой делит гипотенузу на части, длины которых равны 6 см и 4 см. Вычислите радиус окружности.

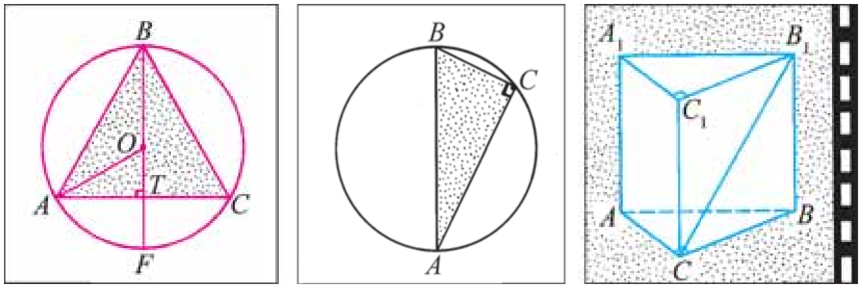
12. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 5 см, а длина одного из катетов 12 см. Вычислите периметр треугольника.

13. Точка O — центр окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, BF — диаметр окружности, $T = BF \cap AC$ (рис. 51, *а*). а) Докажите, что $OT = TF$. б) Верно ли, что $\angle AOT = 60°$? в) Вычислите высоту треугольника, если радиус описанной окружности равен 6 см.

14. Вычислите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, если длина его стороны равна 10 см.

15. Радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр этого треугольника.

16. Около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C описана окружность (рис. 51, *б*). Вычислите радиус этой окружности, если $AC = 8$ см и $BC = 6$ см.



а) б) в)

Рис. 51

17. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, если $\angle CBA = 30°$, $AC = 9$ см.

18. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма (все боковые грани прямой призмы — прямоугольники), основанием которой служит прямоугольный треугольник ACB с прямым углом C (рис. 51, *в*). Вычислите диаметр окружности, описанной около треугольника CBB_1, если $AB = 13$ см, $AC = 5$ см и $BB_1 = 5$ см.

19. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанной около него окружности равен 5 см, а длина одного из катетов — 8 см.

20. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 10 см, а высота, проведенная из его вершины к основанию, 8 см. Вычислите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

21. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R, а его боковая сторона равна a. Найдите высоту треугольника, которая проведена к его основанию.

22. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна 13 см, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $7\frac{1}{24}$ см. Вычислите площадь этого треугольника.

23. Около равнобедренного треугольника ABC, основание которого — отрезок AC, описана окружность с центром O, BF — диаметр окружности, $T = BF \cap AC$. Вычислите длину диаметра BF, если $BC = 10$ см, $BT = 8$ см.

24. Вычислите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, если длина его основания равна 10 см, а длина боковой стороны 13 см.

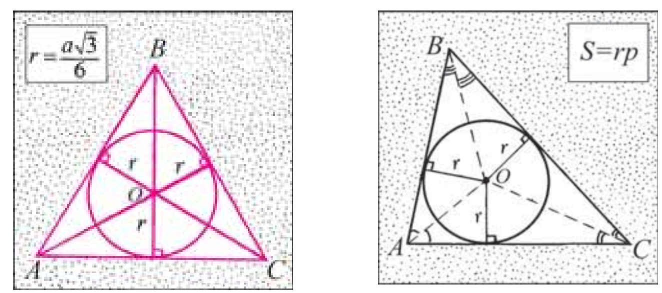
25. ABC — равнобедренный треугольник, основание которого — отрезок AC. Вычислите радиус окружности, описанной около этого треугольника, если $\angle ABC = 120°$ и $AB = 12$ см.

26. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 30°, а его боковая сторона равна a. Докажите, что диаметр окружности, описанной около этого треугольника, равен $2a$.

27. Сторона равностороннего треугольника равна a. Докажите, что радиус r вписанной в этот треугольник окружности можно найти по формуле $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ (рис. 52, *а*).

28. Радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник, равен r. Докажите, что площадь этого треугольника $S = 3\sqrt{3}\,r$ (см. рис. 52, *а*).

29. Докажите, что площадь S любого треугольника можно найти по формуле $S = rp$, где p — полупериметр этого треугольника, r — радиус вписанной окружности (рис. 52, *б*).



а) б)

Рис. 52

30. Радиус описанной около равнобедренного треугольника окружности равен R, угол при его основании φ. Найдите площадь треугольника.

31. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основаниями которой служат равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Вычислите площадь боковой грани призмы, если радиус окружности, вписанной в основание призмы, равен $\sqrt{3}$ см, а длина диагонали боковой грани 10 см.

II

32. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписана окружность, радиус которой равен $2\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь этого треугольника.

33. Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

34. Периметр прямоугольного треугольника равен 90 см, а радиус вписанной в него окружности равен 4 см. Вычислите длины катетов этого треугольника.

35. Около окружности радиуса 5 см описан прямоугольный треугольник, у которого высота, проведенная к гипотенузе, равна 12 см. Вычислите длину гипотенузы.

36. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 24 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Вычислите длины сторон треугольника.

37. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основанием которой служит прямоугольный треугольник с прямым углом C. Вычислите длину диагонали грани ABA_1B_1, если катет треугольника ACB равен 3 см, радиус вписанной в него окружности равен 1 см, а площадь грани ABA_1B_1 равна 60 см^2.

38. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, а радиусы вписанной и описанной окружностей — r и R. Докажите, что $a + b = 2(r + R)$.

39. В прямоугольный треугольник вписана окружность, точка касания которой делит гипотенузу на отрезки m и n. Докажите, что площадь S треугольника можно найти по формуле $S = mn$.

40. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник равен r, а его гипотенуза c. Докажите что площадь S треугольника можно найти по формуле $S = r + rc$.

41. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два прямоугольных треугольника. Докажите, что $r + r_1 + r_2 = h$, где r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник; r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанные в полученные треугольники; h — высота, проведенная к гипотенузе.

42. В равнобедренный треугольник вписана окружность. Расстояние от центра окружности до вершины угла, противолежащего основанию, равно 10 см, а длина боковой стороны 20 см. Вычислите радиус вписанной окружности.

43. В равнобедренном треугольнике градусная мера угла при основании 30°. Высота, проведенная к основанию, больше радиуса вписанной окружности на 2 см. Вычислите длину основания треугольника.

44. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его высота, проведенная к основанию, равна h, а радиус вписанной окружности r.

45. В окружность вписан равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 10 см, а длина боковой стороны 12 см. Через середину высоты треугольника проведена хорда, параллельная основанию. Вычислите длину хорды.

46. Около равнобедренного треугольника описана окружность радиуса 25 см. Расстояние от центра окружности до основания равно 7 см. Вычислите площадь треугольника.

47. В равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 18 см, а основания 12 см, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Вычислите длину отрезка касательной, который ограничен точками пересечения с боковыми сторонами.

48. Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен R, а один из его острых углов α. Найдите радиус вписанной окружности.

49. BD и AE — высоты равнобедренного треугольника ABC с основанием AC. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABD и AEC, равны соответственно 10 см и 12см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

50. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и радиусу r вписанной окружности.

51. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и медиане m, проведенной к катету.

52. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и биссектрисе l прямого угла.

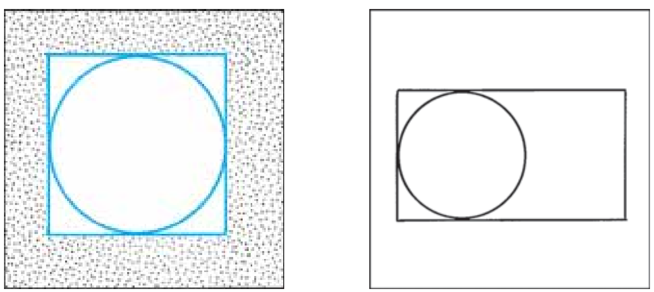
Вписанные и описанные четырехугольники

§ 5. Вписанные и описанные четырехугольники

1. Окружность, вписанная в четырехугольник. Определим понятие окружности, вписанной в четырехугольник.

Определение. Окружность называется вписанной в четырехугольник, если она касается всех сторон четырехугольника. В этом случае четырехугольник называется описанным около окружности.

Например, на рисунке 53, *а* изображен квадрат и вписанная в него окружность. Заметим, что не в любой четырехугольник можно вписать окружность. Например, в прямоугольник, не являющийся квадратом, нельзя вписать окружность. Существует окружность, которая касается трех сторон прямоугольника, и не существует окружности, касающейся всех четырех сторон прямоугольника — неквадрата (рис. 53, *б*).



а) *б)*

Рис. 53

Следующая теорема характеризует свойство четырехугольника, в который можно вписать окружность.

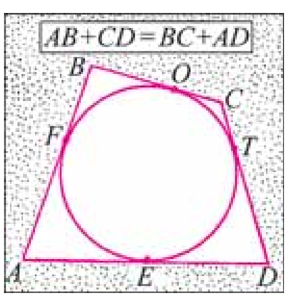


Рис. 54

Теорема 1 ***(о свойстве четырехугольника, в который можно вписать окружность).*** **Если в четырехугольник можно вписать окружность, то суммы длин его противолежащих сторон равны.**

Доказательство.

1) Пусть в четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, которая касается его сторон в точках F, O, T и E (рис. 54).

Докажем, что $AB + CD = BC + AD$.

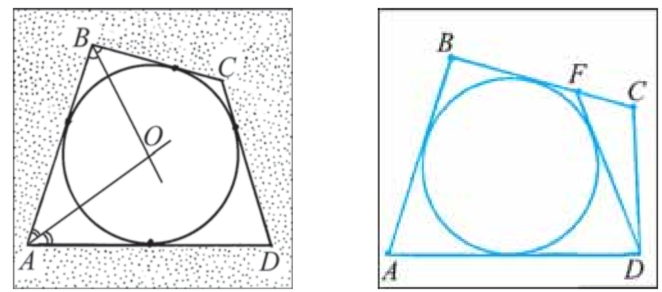
2) Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то $AF = AE = a$, $BF = BO = b$, $CO = CT = m$, $DT = DE = c$.

3) Таким образом, $AB + CD = (AF + FB) + (CT + DT) = a + b + c + m$ и $BC + AD = (BO + OC) + (AE + ED) = a + b + c + m$. Отсюда следует, что $AB + CD = BC + AD$.

Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение, которое отвечает на вопрос, при каком условии в четырехугольник можно вписать окружность.

[Теорема 2 ***(условие, при котором в четырехугольник можно вписать окружность)*]. **Если в выпуклом четырехугольнике суммы длин противолежащих сторон равны, то в этот четырехугольник можно вписать окружность.**



а) *б)*

Рис. 55

Доказательство.

1) Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $AB + CD = BC + AD$. Докажем, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

2) Рассмотрим окружность, которая касается трех сторон: AB, BC и AD. Центр O этой окружности есть точка пересечения биссектрис углов CBA и BAD (рис. 55, *а*).

3) Докажем, что эта окружность вписана в четырехугольник, т. е. что она касается также и стороны CD. Предположим, что это не так. Тогда либо сторона CD не пересекает окружность, либо является секущей.

4) Пусть сторона CD не пересекает окружность (рис. 55, *б*). Проведем касательную DF, где $F \in BC$. Так как $ABFD$ — описанный четырехугольник, то верно равенство $AB + DF = AD + BF$. Кроме

того, по условию $AB + CD = BF + FC + AD$. Отсюда следует, что $AB + CD = AB + DF + FC$ или $CD - DF = FC$, что невозможно, так как в треугольнике DFC сторона FC должна быть больше разности двух других сторон. Аналогично приводит к противоречию и предположение о том, что сторона CD является секущей.

5) Таким образом, предположение о том, что сторона CD не касается рассматриваемой окружности, неверно. Следовательно, сторона CD касается этой окружности, и, значит, окружность вписана в четырехугольник $ABCD$. Теорема доказана.

2. Окружность, описанная около четырехугольника. Определим понятие окружности, описанной около четырехугольника.

Определение. Окружность называется описанной около четырехугольника, если все его вершины лежат на окружности. В этом случае четырехугольник называется вписанным в окружность.

Теперь рассмотрим свойство четырехугольника, вписанного в окружность.

Теорема 3 *(о свойстве четырехугольника, вписанного в окружность)*. Если около четырехугольника описана окружность, то суммы градусных мер его противолежащих углов равны 180°.

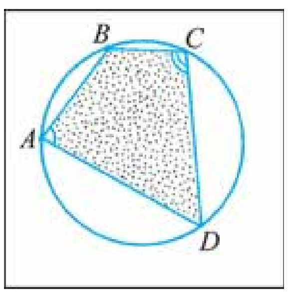


Рис. 56

Доказательство.

1) Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 56). Докажем, что $\angle A + \angle C = 180°$ и $\angle B + \angle D = 180°$.

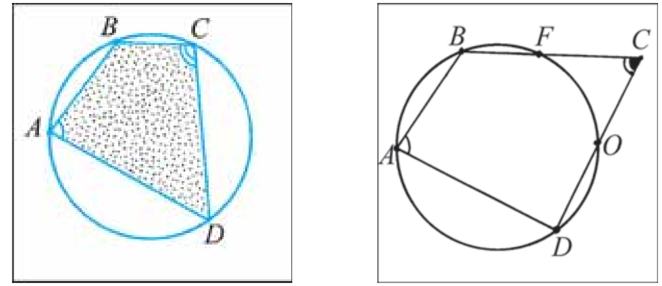
2) Так как углы A и C — вписанные, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ и $\angle C = \frac{1}{2} \cup BAD$. Таким образом, $\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \cup BCD + \frac{1}{2} \cup BAD = \frac{1}{2}(\cup BCD + \cup BAD) = \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Так как сумма углов четырехугольника $ABCD$ равна 360° и $\angle A + \angle C = 180°$, то $\angle B + \angle D = 180°$.

Теорема доказана.

Справедливо и обратное утверждение, характеризующее условие, при котором можно описать окружность около четырехугольника.

[Теорема 4 *(условие, при котором около четырехугольника можно описать окружность)*]. Если в четырехугольнике сумма градусных мер противолежащих углов равна 180°, то около такого четырехугольника можно описать окружность.



а) *б)*

Рис. 57

Доказательство.

1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ выполняется равенство $\angle A + \angle C = 180°$. Докажем, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность (рис. 57, *а*).

2) Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABD, и докажем, что эта окружность проходит также через вершину C. Предположим, что окружность не проходит через вершину C. Тогда либо вершина C лежит вне круга, границей которого служит рассматриваемая окружность, либо внутри этого круга.

3) Пусть вершина C лежит вне круга (рис. 57, *б*). Обозначим буквами F и O точки пересечения сторон BC и DC с окружностью. Тогда $\angle C = \frac{1}{2}(\cup DAB - \cup FO)$. Следовательно, $\angle C < \frac{1}{2} \cup DAB$. Так как угол A вписанный, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BOD$, а значит, $\angle A + \angle C < \frac{1}{2}(\cup BOD + \cup DAB) < \frac{360°}{2} = 180°$.

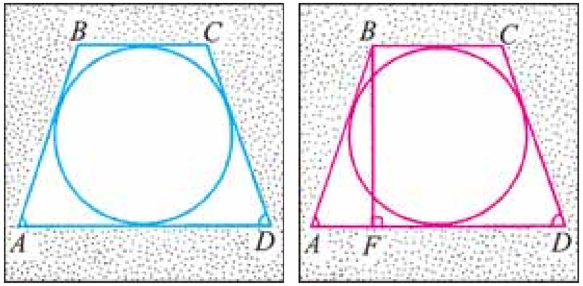
Это противоречит условию, значит, наше предположение не верно, т. е. окружность проходит через вершину C. Аналогично можно доказать, что вершина C не может лежать внутри круга.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы следует, что *около любого прямоугольника можно описать окружность*.

Рассмотрим некоторые задачи, при решении которых используются доказанные теоремы.

Задача 1. Около окружности описана равнобедренная трапеция $ABCD$, длина ее боковой стороны равна 10 см, а угол при основании трапеции равен 60°. Вычислите площадь трапеции.



а) б)
Рис. 58

Дано:
$ABCD$ — трапеция,
$AB = CD = 10$ см,
$\angle BAD = 60°$
(рис. 58, *а*).
Вычислить: S_{ABCD}.

Решение.

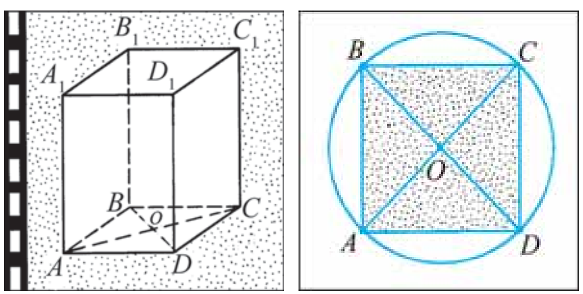
Для нахождения площади трапеции можем воспользоваться формулой $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, *где* a, b — *длины ее оснований,* h — *высота.*

1) Пусть отрезок BF — высота трапеции. Тогда $S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF$ (рис. 58, *б*).

2) Так как в трапецию $ABCD$ вписана окружность, то $BC + AD = AB + CD$. Но так как трапеция равнобедренная, $AB = CD$. Таким образом, $BC + AD = 2AB = 20$ см.

3) В прямоугольном треугольнике AFB катет $BF = AB\sin 60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ см. Теперь можем найти площадь трапеции $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BF = \frac{20}{2} \cdot 5\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$ (см²). Ответ: $50\sqrt{3}$ см².

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основанием которого служит квадрат. Вычислите площадь боковой грани параллелепипеда, если диаметр окружности, описанной около основания параллелепипеда, равен $3\sqrt{2}$ см, а боковое ребро в два раза больше стороны основания.



а) б)
Рис. 59

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед,
$DD_1 = 2AB$,
$AD = DC$,
$R_{ABCD} = 3\sqrt{2}$ см.
Найти: площадь боковой грани.

Решение.

По условию дан прямоугольный параллелепипед, значит, каждая его грань является прямоугольником. Так как основания параллелепипеда — квадраты, то боковые грани — равные прямоугольники. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, следовательно, достаточно вычислить, например, длины DC *и* DD_1, *тогда площадь грани* $S_{DD_1CC_1} = S_{DD_1C_1C} = DC \cdot DD_1$.

1) Диагональ квадрата, вписанного в окружность, равна диаметру окружности, значит, $AC = 3\sqrt{2}$ см (рис. 59, *б*).

2) В равнобедренном прямоугольном треугольнике ADC имеем $AC^2 = 2DC^2$, $18 = 2DC^2$. Значит, $DC = 3$ см.

3) По условию боковое ребро параллелепипеда в два раза больше стороны основания. Значит, $DD_1 = 2DC = 6$ см.

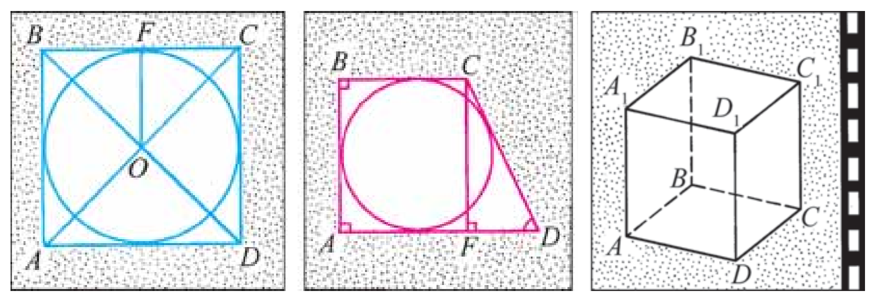
4) Теперь можем вычислить площадь боковой грани $S_{DD_1C_1C} = DC \cdot DD_1 = 6 \cdot 3 = 18$ (см²). Ответ: 18 см².

Задачи к § 5

I

1. Квадрат $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O (рис. 60, *а*). Вычислите площадь треугольника COB, если радиус окружности равен 2 см.

2. Длина диагонали квадрата равна $4\sqrt{2}$ см. Вычислите радиус окружности, вписанной в квадрат.



а) б) в)
Рис. 60

3. Прямоугольная трапеция $ABCD$ описана около окружности. Вычислите длину боковой стороны, если радиус окружности равен 4 см, а острый угол трапеции 60° (рис. 60, *б*).

4. Окружность вписана в прямоугольную трапецию, острый угол которой равен 30°, а длина боковой стороны равна 8 см. Вычислите периметр трапеции.

5. В прямоугольную трапецию *ABCD* с острым углом 45° вписана окружность радиуса 2 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник *CDF*, где отрезок *CF* — высота трапеции.

6. Площадь всех граней куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 24 см^2 (рис. 60, *в*). Вычислите радиус окружности, вписанной в грань куба.

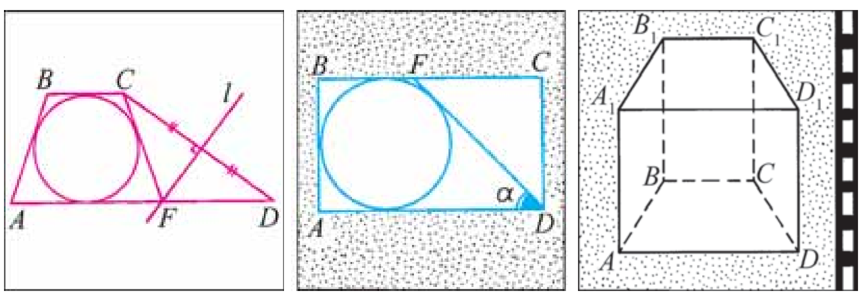
7. Равнобедренная трапеция *ABCD* с основаниями *BC* и *AD* описана около окружности. Вычислите периметр трапеции, если $AB = 5$ см.

8. Около окружности описана равнобедренная трапеция, периметр которой равен 12 см. Вычислите длину боковой стороны трапеции.

9. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Вычислите длину средней линии трапеции, если длина боковой стороны трапеции равна 4 см.

10. Вычислите периметр трапеции, описанной около окружности, если длина ее средней линии равна 10 см.

11. Периметр равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равен 40 см. Вычислите высоту трапеции, если острый угол трапеции равен 30°.



а) *б)* *в)*

Рис. 61

12. Серединный перпендикуляр *l* к боковой стороне *CD* трапеции *ABCD* пересекает основание *AD* в точке *F* (рис. 61, *а*). Вычислите длину отрезка *FD*, если *ABCF* — равнобедренная трапеция, в которую можно вписать окружность, а периметр трапеции *ABCF* равен 24 см.

13. *ABCD* — прямоугольник, точка *F* лежит на стороне *BC* так, что в четырехугольник *ABFD* можно вписать окружность (рис. 61, *б*). Вычислите периметр трапеции *ABFD*, если $AB = a$ и $\angle ADF = \alpha$.

14. Длина бокового ребра прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, основаниями которой служат равнобедренные трапеции *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$, равна 10 см (рис. 61, *в*). Вычислите сумму площадей всех боковых граней призмы, если в трапецию *ABCD* можно вписать окружность, а длина ее боковой стороны равна 2 см.

15. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна *a*. Найдите периметр четырехугольника.

16. Равнобедренная трапеция описана около окружности. Найдите боковую сторону трапеции, если ее периметр равен *m*.

17. Докажите, что если в параллелограмм вписана окружность, то он является ромбом.

18. Около окружности описан ромб, длина стороны которого равна 5 см, а длина одной из диагоналей равна 8 см. Вычислите радиус окружности.

19. Диагональ ромба равна его стороне. Вычислите периметр ромба, если радиус вписанной в него окружности равен $\sqrt{3}$ см.

20. В равнобедренной трапеции, описанной около окружности, длина боковой стороны равна 6 см, а угол при основании равен 150°. Вычислите площадь трапеции.

21. Около окружности радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция с острым углом, равным 30°. Вычислите площадь трапеции.

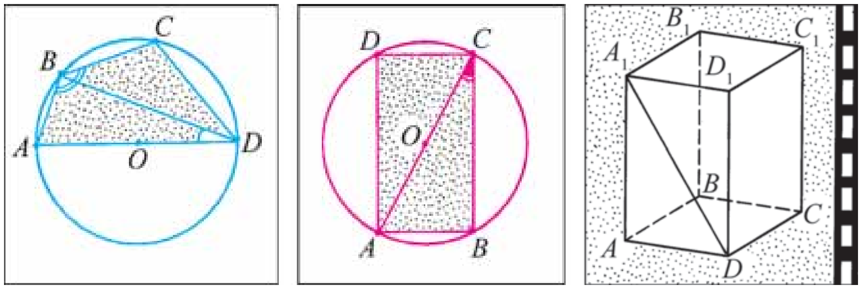
22. Равнобедренная трапеция описана около окружности радиуса 6 см. Вычислите площадь трапеции, если ее периметр равен 50 см.

23. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину боковой стороны трапеции, если угол при основании трапеции равен 60°.

24. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 8 см^2, а градусная мера острого угла трапеции равна 30°. Вычислите радиус вписанной окружности.

25. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$ так, что ее центр O лежит на стороне AD. Вычислите градусные меры углов BCD и BDC, если $\angle ABC = 140°$, $\angle ADB = 20°$ (рис. 62, *а*).

26. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность так, что сторона AD служит диаметром окружности. Вычислите градусные меры углов BAD, ADC и BCA, если $\angle ABC = 132°$, $\angle BCD = 140°$.



а) *б)* *в)*

Рис. 62

27. В окружность с центром в точке O вписан прямоугольник $ABCD$ (рис. 62, *б*). а) Верно ли, что точка O есть середина диагонали AC? б) Вычислите периметр прямоугольника, если радиус описанной окружности равен 2 см, а диагональ прямоугольника образует со стороной угол 30°.

28. Периметр прямоугольника равен 12 см, а длины его сторон относятся как 1 : 2. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

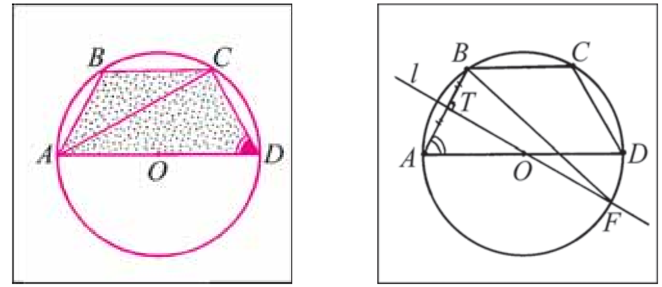
29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, основаниями которого служат квадраты, площадь каждого из них равна 49 см^2 (рис. 62, *в*). Вычислите диаметр окружности, описанной около боковой грани параллелепипеда, если длина бокового ребра равна $\sqrt{15}$ см.

30. Вычислите радиус окружности, описанной около прямоугольника, если его площадь равна 8 см^2, а длина одной из сторон равна 2 см.

31. Докажите, что если около параллелограмма описана окружность, то этот параллелограмм является прямоугольником.

32. Докажите, что если около трапеции можно описать окружность, то эта трапеция равнобедренная.

33. Окружность радиуса 4 см описана около трапеции $ABCD$, а ее центр O лежит на основании AD трапеции. Вычислите длину диагонали трапеции, если $\angle ADC = 60°$ (рис. 63, *а*).



а) *б)*

Рис. 63

34. Около трапеции, высота которой равна 4 см, описана окружность. Вычислите радиус окружности, если основание трапеции является диаметром окружности, а один из углов трапеции равен 120°.

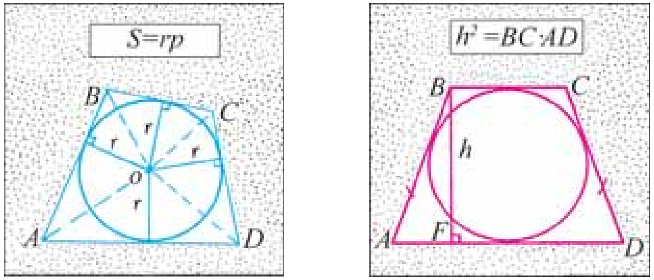
35. Центр окружности радиуса 6 см, описанной около трапеции, лежит на одном из оснований трапеции. Вычислите периметр трапеции, если один из ее углов равен 60°.

36. Основание трапеции $ABCD$ является диаметром описанной около нее окружности. Серединный перпендикуляр l к боковой стороне AB пересекает окружность в точке F. Вычислите расстояние от вершины B до точки F, если $\angle ADC = 60°$, а радиус окружности равен 2 см (рис. 63, *б*).

37. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции, если длина ее диагонали равна 12 см, а боковой стороны 9 см.

38. Диагональ равнобедренной трапеции перпендикулярна боковой стороне, один из ее углов равен 60°. Вычислите площадь трапеции, если радиус описанной около нее окружности равен 4 см.

39. Докажите, что площадь описанного четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности: $S = rp$, где $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ (рис. 64, *а*).



а) *б)*

Рис. 64

40. Докажите, что квадрат высоты равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равен произведению длин оснований трапеции: $h^2=ab$, где a и b — длины оснований трапеции (рис. 64, *б*).

II

41. Сумма двух противолежащих сторон описанного четырехугольника равна a, а радиус вписанной окружности равен b. Найдите площадь четырехугольника.

42. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренную трапецию, если ее большее основание равно a, а угол при меньшем основании 120°.

43. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки p и q. Найдите площадь трапеции.

44. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Боковая сторона трапеции делится точкой касания на отрезки a, b. Докажите, что радиус вписанной окружности $r=\sqrt{ab}$.

45. Прямоугольник, длины сторон которого равны 6 см и 8 см, разделен диагональю на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Вычислите расстояние между центрами окружностей.

46. Стороны AB и BC прямоугольника равны 12 см и 6 см соответственно. Окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются диагонали AC в точках K и T. Вычислите расстояние между точками K и T.

47. В ромб вписана окружность радиуса r. Найдите площадь ромба, если его большая диагональ в четыре раза больше радиуса вписанной окружности.

48. В ромб с острым углом 60° вписана окружность. Расстояние между точками касания смежных сторон и окружности равно $2a$. Найдите площадь ромба.

49. В квадрат вписана окружность. Другая окружность касается двух сторон квадрата, а также касается внешним образом вписанной в него окружности. Найдите радиус меньшей окружности, если сторона квадрата равна a.

50. Длины боковых сторон трапеции равны 3 см и 5 см. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $5:11$. Вычислите длины оснований трапеции.

51. Вычислите площадь трапеции по разности длин оснований, равной 14 см, и длинам непараллельных сторон, равных 13 см и 15 см, если известно, что в трапецию можно вписать окружность.

52. Около окружности описана трапеция, длины боковых сторон которой равны 13 см и 15 см, а площадь равна 168 см^2. Вычислите длины оснований трапеции.

53. Около окружности описана равнобедренная трапеция, длина средней линии которой равна 5 см, а синус острого угла при основании 0,8. Вычислите площадь трапеции.

54. Высоты BF и CT остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке S. Верно ли, что около четырехугольника $ATSF$ можно описать окружность?

55. В равнобедренном треугольнике ABC проведена высота AF к боковой стороне BC и медиана BT к основанию AC, $O=BT\cap AF$. Докажите, что около четырехугольника $TOFC$ можно описать окружность.

56. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AE и CK. Вычислите радиус окружности, описанной около четырехугольника $AKEC$, если известно, что периметр треугольника ABC равен 15 см, периметр треугольника BEK равен 9 см, а радиус окружности, описанной около треугольника BEK, равен 1,8 см.

Вопросы к первой главе

1. Верно ли, что прямая, имеющая общую точку с окружностью, называется касательной к окружности?
2. Каким свойством обладает радиус окружности, проведенный в точку касания прямой и окружности?
3. Каким свойством обладают отрезки касательных к окружности, проведенных из одной точки?
4. Сформулируйте признак касательной к окружности.
5. Сформулируйте признак касания двух окружностей внешним образом.
6. Какой угол называется центральным углом окружности?
7. Что называется градусной мерой дуги окружности?
8. Дайте определение вписанного в окружность угла.
9. Чему равна градусная мера вписанного в окружность угла?
10. Сформулируйте теорему об угле между хордой и касательной.
11. Каким свойством обладают отрезки пересекающихся хорд окружности?
12. Сформулируйте теорему об отрезках секущей и касательной.
13. Каким свойством обладают точки биссектрисы угла треугольника?
14. Верно ли, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке?
15. Дайте определение окружности, вписанной в треугольник.
16. Верно ли, что в каждый треугольник можно вписать единственную окружность?
17. Докажите теорему о существовании окружности, описанной около треугольника.
18. Дайте определение описанной около четырехугольника окружности.
19. Каким свойством обладают стороны четырехугольника, описанного около окружности?

[20]. Сформулируйте условие, при котором в четырехугольник можно вписать окружность.

21. Каким свойством обладают углы четырехугольника, вписанного в окружность?

[22]. Сформулируйте условие, при котором около четырехугольника можно описать окружность.

②

Соотношения между сторонами и углами произвольного треугольника

Теорема синусов

Глава 2

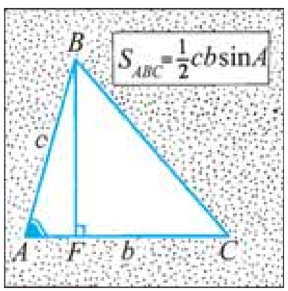
СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

§ 1. Теорема синусов

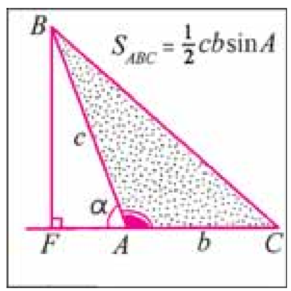
В этом параграфе докажем теорему синусов, которая позволяет находить неизвестные стороны треугольника по данной стороне и двум углам, а также вычислять градусные меры углов, если известны две стороны и угол, лежащий против одной из этих сторон.

Предварительно докажем следующую теорему, которая позволяет находить площадь треугольника, если известны две его стороны и угол между ними. Данная теорема может быть применена при решении многих задач.

Теорема 1 (*о нахождении площади треугольника через две стороны и синус угла между ними*). Площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.



а)



б)

Рис. 65

Доказательство.

Пусть дан треугольник ABC, в котором известен угол A и $AB=c$, $AC=b$. Докажем, что площадь данного треугольника $S_{ABC}=\frac{1}{2}cb\sin A$. Возможны три случая: угол A — острый; угол A — тупой; угол A — прямой.

1) Пусть угол A — острый (рис. 65, *а*). Пусть BF — высота треугольника, проведенная из вершины B, тогда $S_{ABC}=\frac{1}{2}b\cdot BF$.

В прямоугольном треугольнике ABF катет $BF=c\cdot\sin A$. Таким образом, $S_{ABC}=\frac{1}{2}cb\sin A$.

2) Пусть угол A — тупой (рис. 65, *б*). $S_{ABC}=\frac{1}{2}b\cdot BF$. В прямоугольном треугольнике ABF катет $BF=c\cdot\sin\alpha$, где $\alpha=180°-\angle A$. Так как $\sin\alpha=\sin(180°-\angle A)=\sin A$, то $S_{ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\sin A$. Таким образом, в каждом из случаев 1) и 2) площадь треугольника равна половине произведения длин двух его сторон на синус угла между ними.

Если $\angle A=90°$, то $S_{ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\sin 90°=\frac{1}{2}bc$.

Теорема доказана.

Воспользуемся утверждением этой теоремы для доказательства теоремы синусов.

Теорема 2 (*теорема синусов*). Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Доказательство.

1) Пусть ABC — произвольный треугольник, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ (рис. 66). Докажем, что $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

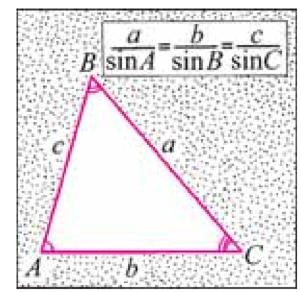


Рис. 66

На основании предыдущей теоремы можем записать следующие равенства:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}cb\sin A$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$ и $S_{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$.

2) Отсюда следует, что выполняются равенства:

$$\frac{1}{2}cb\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B \ (1) \text{ и } \frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C \ (2).$$

3) Из равенства (1) следует, что $b\sin A=a\sin B$. Отсюда

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \quad (3).$$

4) Из равенства (2) следует, что $c\sin B=b\sin C$. Отсюда получаем, что

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B} \quad (4).$$

Из равенств (3) и (4) следует, что $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

Теорема доказана.

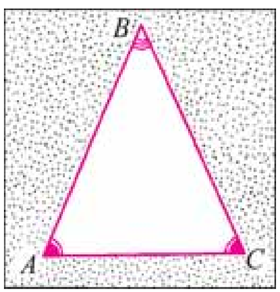
В силу результата задачи 2 § 4 первой главы выполняется равенство $\dfrac{a}{\sin A}=2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Учитывая это равенство и утверждение теоремы синусов, получаем *следствие*: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Так как площадь треугольника $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ и $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, то отсюда следует, что $S_{ABC}=\dfrac{abc}{4R}$.

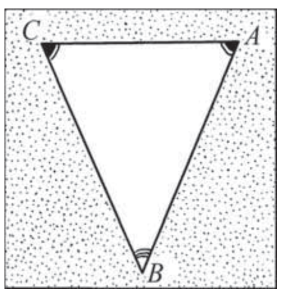
Полученная формула позволяет находить площадь треугольника, зная длины его сторон и радиус описанной окружности, или радиус окружности, описанной около треугольника, если известны длины сторон и площадь треугольника.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач.

Задача 1. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, если длина его боковой стороны равна 10 см, а угол при вершине основания равен 75°.



а)



б)

Рис. 67

Дано: $\triangle ABC$, $AB=BC=10$ см, $\angle BAC=75°$ (рис. 67, *а, б*).
Найти: S_{ABC}.

Решение.

Воспользуемся теоремой о выражении площади треугольника через длины двух его сторон и синус угла между ними.

1) На основании теоремы 1 площадь треугольника можем найти по формуле $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\sin B=\dfrac{1}{2}AB^2\sin B$.

2) Сумма углов треугольника равна 180°, а углы при основании равнобедренного треугольника равны, следовательно, $\angle B=180°-(\angle A+\angle C)=180°-150°=30°$.

3) Таким образом, $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB^2\sin B=S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 100\cdot\ \sin 30°=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot 100\cdot\dfrac{1}{2}=25\,(\text{см}^2)$.

Ответ: 25 см^2.

Задача 2. В треугольнике ABC длина стороны AC равна 4 см, $\angle BAC=60°$, $\angle BCA=70°$. Вычислите длины сторон AB и BC (рис. 68).

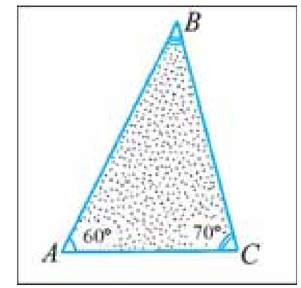


Рис. 68

Решение.

Для вычисления длин сторон воспользуемся теоремой синусов.

1) Пусть $AB=x$ и $BC=y$. Тогда по теореме синусов $\dfrac{x}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$. Отсюда получаем, что $x=\dfrac{AC\sin C}{\sin B}=\dfrac{AC\sin 70°}{\sin B}$.

Сумма углов треугольника равна 180°, следовательно, $\angle B=180°-(60°+70°)=50°$. По таблице Брадиса или с помощью калькулятора находим $\sin 70°\approx 0{,}9397$, $\sin 50°\approx 0{,}7660$.

Таким образом, $x=\dfrac{4\cdot 0{,}9397}{0{,}7660}\approx 3{,}96$.

2) Длину стороны BC также вычислим по теореме синусов: $\dfrac{y}{\sin A}=$ $=\dfrac{AC}{\sin B}$. Отсюда находим $y=\dfrac{AC\sin A}{\sin B}=\dfrac{AC\sin 60°}{\sin 50°}=\dfrac{4\cdot 0{,}8660}{0{,}7660}\approx 4{,}09$ (см).

Ответ: $AB\approx 3{,}96$ см; $BC\approx 4{,}09$ см.

Задача 3. В треугольнике ABC угол B равен 40°, а длины сторон BC и AC равны соответственно 8 см и 6 см. Вычислите градусные меры углов A, C и длину стороны AB.

Решение.

По теореме синусов выполняется равенство $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}$. Отсюда следует, что $\sin A=\dfrac{BC\sin B}{AC}=\dfrac{8\sin 40°}{6}$. По таблице Брадиса или с помощью калькулятора находим, что $\sin 40°\approx 0{,}6428$. Следовательно, $\sin A=\dfrac{8\cdot 0{,}6428}{6}\approx 0{,}8570$.

Этому значению синуса соответствуют два угла: $\angle A_1 \approx 59°$ и $\angle A_2 \approx 121°$.

1) В случае $\angle A_1 \approx 59°$ находим $\angle C_1 = 180° - \angle B - \angle A_1 \approx 81°$. Теперь найдем длину стороны AB: $\frac{AB}{\sin C_1} = \frac{BC}{\sin A}$, $AB = \frac{BC \cdot \sin C_1}{\sin A} = \frac{6 \cdot 0{,}9877}{0{,}8570} \approx 5{,}85$ (см).

2) Если $\angle A_2 \approx 121°$, то $\angle C_2 = 180° - \angle B - \angle A_2 \approx 19°$. В этом случае $AB = \frac{BC \cdot \sin C_2}{\sin A} = \frac{6 \cdot 0{,}3256}{0{,}8570} \approx 6{,}62$ (см).

Ответ: $\approx 59°$, $\approx 81°$, $\approx 5{,}85$ см или $\approx 121°$, $\approx 19°$, $\approx 6{,}62$ см.

Задачи к § 1

I

1. Вычислите площадь треугольника ABC, если $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 60°$.

2. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна 8 см, а угол при основании равен 15°. Вычислите площадь треугольника.

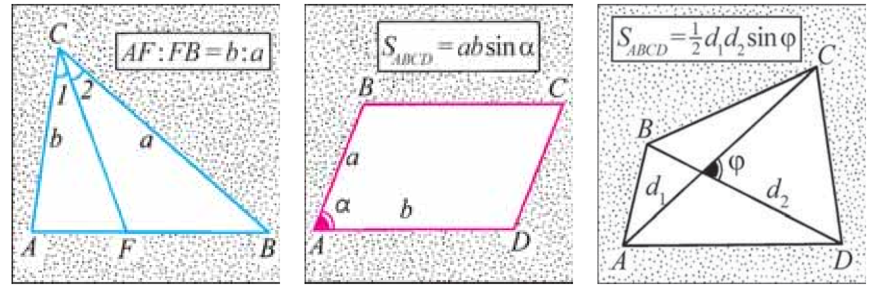
3. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найдите площадь треугольника.

4. Вычислите площадь треугольника ABC, если $\angle A = 60°$, а высоты, проведенные из вершин B и C, равны соответственно $\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см.

5. Длина боковой стороны равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см, а угол при основании равен $22°30'$. Верно ли, что площадь треугольника равна $15\sqrt{2}$ см^2?

6. Вычислите площадь треугольника ABC, если $\angle B = 105°$, $\angle C = 30°$, а высота, проведенная из вершины B, равна 2 см.

7. ABC — произвольный треугольник, отрезок CF — его биссектриса ($\angle 1 = \angle 2$), $AC = b$, $BC = a$. Воспользовавшись формулой для нахождения площади треугольника, докажите, что $AF : FB = b : a$ (рис. 69, *а*).



а) *б)* *в)*

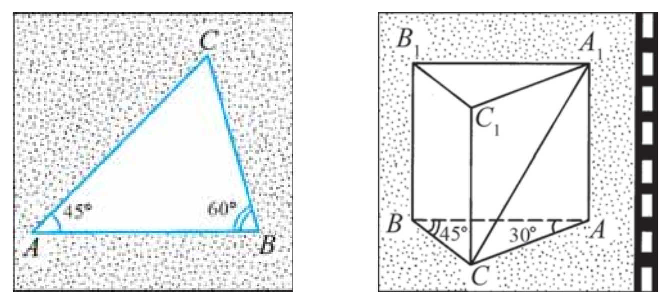
Рис. 69

8. Докажите, что площадь параллелограмма $ABCD$ равна произведению длин a и b его смежных сторон на синус угла α между ними, т. е $S_{ABCD} = ab\sin\alpha$ (рис. 69, *б*).

9. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна половине произведения длин d_1 и d_2 его диагоналей на синус угла φ между ними, т. е. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ (рис. 69, *в*).

10. Длина стороны AC треугольника ABC равна 6 см. Вычислите длину стороны BC, если $\angle B = 60°$ и $\angle A = 45°$ (рис. 70, *а*).

11. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $\angle B = 45°$, $\angle A = 30°$ и $BC = 2$ см. Вычислите длину диагонали грани CC_1A_1A, если $AC = AA_1$ (рис. 70, *б*).



а) *б)*

Рис. 70

12. Длины сторон AB и BC треугольника ABC равны соответственно $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{3}$ см. Вычислите градусную меру угла A, если $\angle C = 45°$.

13. Точка F лежит на катете AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle BAC = 90°$) так, что $\angle AFC = \beta$ и $\angle FCB = \alpha$. Найдите длину отрезка FB, если $AC = a$.

14. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 6 см, $\angle B = 95°$, $\angle A = 55°$. Вычислите длины сторон BC и AC.

15. В равнобедренном треугольнике ABC, основание которого есть отрезок AC, отрезок AF — биссектриса. Вычислите ее длину, если $AC = 10$ см, $\angle ABC = 100°$.

16. Вычислите длину стороны AC треугольника ABC, если $BC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle A = 45°$ и $\angle C = 15°$.

17. В треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно 5 см и 6 см, а $\angle C = 25°$. Вычислите градусную меру угла A, если известно, что этот угол острый.

18. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD диагональ AC является биссектрисой угла A. Вычислите длину диагонали AC, если $AC = CD$, $AD = 12$ см, $\angle ABC = 150°$.

19. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса острого угла A пересекает сторону BC в точке F. Вычислите длину отрезка AF, если $\angle BCD = 30°$ и $DC = 6$ см.

20. $ABCD$ — параллелограмм, в котором угол A равен α. Точка F лежит на стороне AD так, что $\angle BFD : \angle A = 2 : 1$. Найдите длину отрезка BF, если $CD = b$.

21. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса острого угла A, который равен 60°, пересекает сторону BC в точке F. Вычислите площадь треугольника ABF, если $BF = 5$ см.

22. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол при вершине B равен α. Найдите биссектрису CT этого треугольника, если $AC = a$.

23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC отрезок BF — биссектриса. Найдите BF, если $\angle B = \beta$, $BC = m$.

24. Диагональ BD прямоугольника $ABCD$ образует со стороной AB угол 15°. Биссектриса угла A пересекает диагональ BD в точке F. Вычислите длину отрезка BF, если $CD = 2\sqrt{3}$ см.

25. В треугольнике ABC сторона AC равна a, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Найдите площадь треугольника.

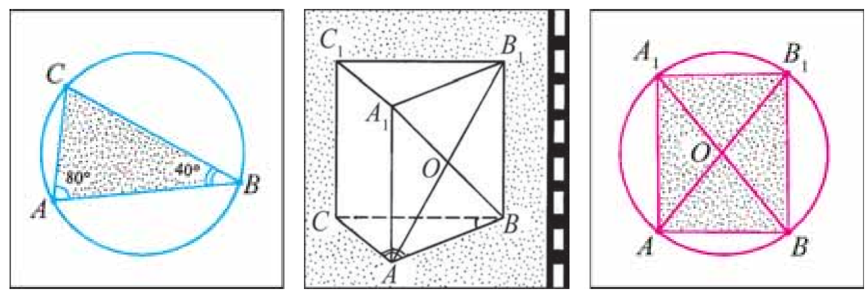
26. Один из углов треугольника равен 60°, а радиус описанной окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Вычислите длину стороны, лежащей против данного угла.

27. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle ABC = 30°$ и $AC = 6$ см.

28. В треугольнике ABC углы A и C равны соответственно 45° и 30°. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, если высота, проведенная из вершины B, равна 4 см.

29. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 8\sqrt{3}$ см, $\angle A = 40°$ и $\angle C = 20°$.

30. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{3}$ см. Вычислите длину стороны AC, если $\angle A = 40°$, $\angle C = 80°$.



а) б) в)

Рис. 71

31. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, у которого $\angle A = 80°$, $\angle B = 40°$, а радиус описанной окружности равен $4\sqrt{3}$ см. Вычислите радиус окружности, описанной около грани AA_1B_1B, если площадь этой грани равна 60 см^2 (рис. 71, *а, б, в*).

32. Вычислите площадь параллелограмма $ABCD$, если его периметр равен 12 см, $AB = 2$ см и $\angle ABC = 30°$.

33. Вычислите площадь прямоугольника, длина диагонали которого равна 4 см, а угол между диагоналями равен 30°.

34. В параллелограмме $ABCD$ диагональ $AC = m$. Найдите площадь параллелограмма, если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle CAD = \beta$.

II

35. Вычислите площадь треугольника, длина одной стороны которого равна 4 см, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°.

36. В треугольнике длины двух сторон равны 15 см и $6\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь треугольника, если высоты, проведенные к этим сторонам, пересекаются под углом 60°.

37. В остроугольном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно 10 см и 18 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если высота, проведенная из вершины B, равна 6 см.

38. Высота BD, проведенная к основанию равнобедренного треугольника ABC, равна m, а $\angle ABC = 30°$. Через середину высоты BD проведена прямая, пересекающая боковые стороны AB и BC в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если $\angle BEF = 60°$.

39. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 10 см. Отрезок BD — высота треугольника и $AB = 10$ см, $AD = 6$ см. Вычислите длину стороны BC.

40. Отрезок BF — медиана треугольника ABC, $\angle ABC = 75°$, $\angle CBF = 45°$. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABF, если радиус окружности, описанной около треугольника CBF, равен $2\sqrt{2}$ см.

41. В треугольнике ABC углы A и C равны соответственно α и γ, отрезок AD — биссектриса треугольника. Найдите отношение площадей треугольников ABD и ADC.

42. Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, если $AD = a$, $\angle BCA = \varphi$ и $\angle CDA = \alpha$.

43. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle B = \beta$, $\angle A = \alpha$, а высота BF равна h.

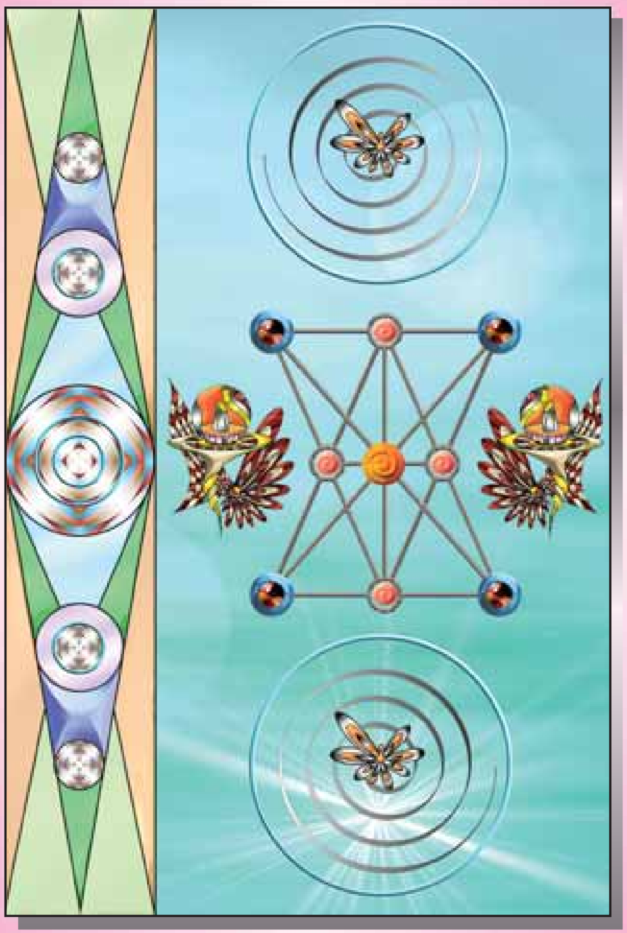
44. Сторона BC треугольника ABC равна a, а $\angle A = \alpha$. Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O.

45. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC = 15$ см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если сумма площадей боковых граней призмы равна 216 см^2, а длина бокового ребра равна 4 см.

46. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle CAB = \alpha$ и $\angle ABC = \beta$.

47. В равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = a$, CM — биссектриса треугольника, $MK \parallel AC$, $K \in BC$. Найдите площадь треугольника KBM, если $\angle BCA = \alpha$.

Теорема косинусов.
Формула Герона.
Решение треугольников



§ 2. Теорема косинусов. Формула Герона. Решение треугольников

1. Теорема косинусов. В данном параграфе докажем теорему, которая связывает длины трех сторон треугольника и косинус одного из его углов. Эта теорема называется теоремой косинусов и формулируется следующим образом.

Теорема 1 *(теорема косинусов)*. **Квадрат длины любой стороны треугольника равен сумме квадратов длин двух других его сторон без удвоенного произведения длин этих сторон на косинус угла между ними.**

Доказательство.

1) Пусть отрезок CH — высота треугольника ABC с острым углом A, $AC = b$, $CB = a$, $AB = c$ (рис. 72).

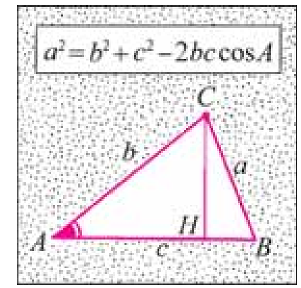


Рис. 72

2) В прямоугольном треугольнике ACH катет $CH = b\sin A$, катет $AC = b\cos A$. Тогда длина отрезка $BH = c - b\cos A$.

3) Воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике CBH: $CB^2 = CH^2 + BH^2$ или $a^2 = (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2$. Отсюда получаем $a^2 = b^2\sin^2 A + c^2 - 2bc\cos^2 A + b^2\cos^2 A$ или $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, так как $b^2\sin^2 A + b^2\cos^2 A = b^2$.

Нетрудно доказать, что формула верна и в случае, когда угол A тупой. В этом случае проведите доказательство самостоятельно.

Если угол A прямой, то теорема косинусов представляет собой теорему Пифагора $a^2 = b^2 + c^2$, так как в этом случае $\cos A = \cos 90° = 0$.

Теорема доказана.

Аналогично квадраты длин сторон b и c выражаются соответственно формулами $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ и $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

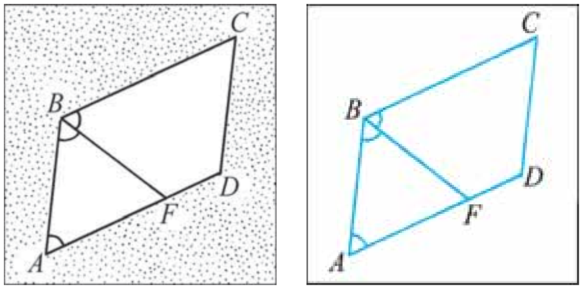
Задача 1. Пусть ABC — треугольник, $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см. Докажите, что угол, лежащий против стороны BC, равен 60°.

Доказательство.

По теореме косинусов верно равенство $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$. Следовательно, $49 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8\cos A$. Отсюда находим, что $\cos A = \frac{1}{2}$. Значит, $\angle A = 60°$.

Что и требовалось доказать.

Задача 2. В параллелограмме биссектриса тупого угла, равного 120°, делит сторону параллелограмма на отрезки 3 см и 2 см, считая от вершины острого угла. Вычислите длины биссектрисы и большей диагонали параллелограмма.



а) б)

Рис. 73

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, BF — биссектриса, $AF = 3$ см, $FD = 2$ см, $\angle ABC = 120°$ (рис. 73, *а, б*).

Найти: BF и AC.

Решение.

1) Рассмотрим треугольник ABF. Так как BF — биссектриса и $\angle ABC = 120°$, то $\angle ABF = 60°$. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°, следовательно, $\angle BAF = 60°$. Таким образом, в треугольнике ABF каждый угол равен 60°, т. е. этот треугольник — равносторонний и $BF = AF = AB = 3$ см.

2) Для вычисления длины диагонали AC воспользуемся теоремой косинусов. В треугольнике ABC по теореме косинусов можем записать $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120°$. Так как по условию задачи $BC = 5$ см, то $AC^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120°$. Так как $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, то отсюда находим, что $AC = 7$ см.

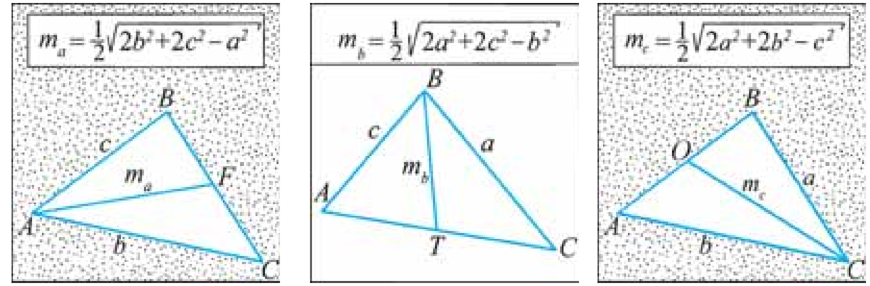
Ответ: 3 см, 7 см.

Теорема косинусов позволяет доказать ряд утверждений, которые полезны при решении многих задач. Докажем некоторые из таких утверждений.

Задача 3. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника ABC, то длины его медиан m_a, m_b и m_c могут быть найдены по формулам $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

Доказательство.

Докажем, например, первую формулу.



а) б) в)

Рис. 74

Применим теорему косинусов к треугольнику ABF, в котором $AB = c$, $BF = \frac{1}{2}a$, $AF = m_a$. По теореме косинусов в треугольнике ABF можем записать $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c \cdot \frac{a}{2} \cos B$. По теореме косинусов из треугольника ABC имеем $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Таким образом, получаем $m_a^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2c \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$. Отсюда следует, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. Аналогично доказываются две другие формулы (рис. 74, *а, б, в*). Заметим, что при доказательстве указанных формул можно воспользоваться следующей задачей.

Задача 4. Пусть d_1 и d_2 — длины диагоналей параллелограмма, a и b — длины его сторон. Докажите, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон, т. е. $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Доказательство.

Пусть $AC = d_1$, $BD = d_2$ — диагонали параллелограмма $ABCD$ и $AB = a$, $BC = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 75).

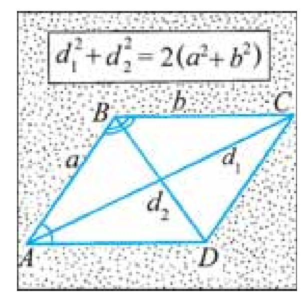


Рис. 75

По теореме косинусов в треугольнике ABD справедливо следующее равенство $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ (1).

По теореме косинусов в треугольнике ABC выполняется равенство $d_1^2 = a^2 +$

$+ b^2 - 2ab \cos(180° - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha$ (2). Складывая равенства (1) и (2) почленно, получаем $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Что и требовалось доказать.

2. Формула Герона. Теперь докажем справедливость формулы, которая названа в честь древнегреческого математика Герона Александрийского.

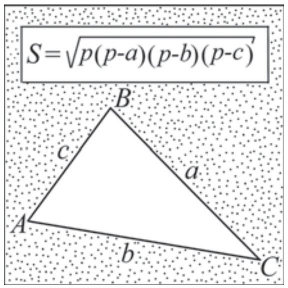


Рис. 76

Теорема 2 (*формула Герона*). Площадь любого треугольника можно найти по формуле $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b и c — длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр (рис. 76).

Доказательство.

По теореме косинусов верно равенство: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (1). Так как площадь треугольника $S = \frac{1}{2} bc \sin A$, то $4S = 2bc \sin A$ (2). Из равенств (1) и (2) получаем соответственно $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ и $\sin A = \frac{4S}{2bc}$. Так как $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, то $\left(\frac{4S}{2bc}\right)^2 + \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1$.

Отсюда $16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

Используя формулу разности квадратов, преобразуем правую часть полученного равенства следующим образом:

$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$

$= ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2) =$

$= (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c) =$

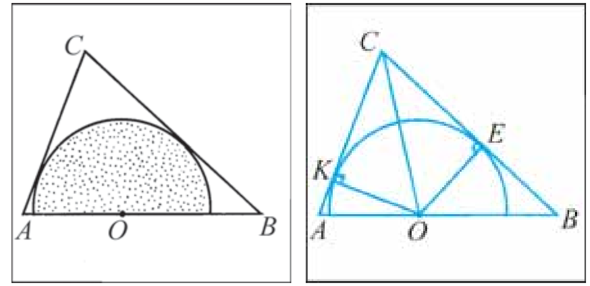
$= 2p(2p - 2a)(2p - 2c)(2p - 2b) = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$.

Следовательно, $16S^2 = 16p(p - a)(p - b)(p - c)$, или $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Теорема доказана.

Проиллюстрируем возможность применения формулы Герона при решении задачи.

Задача 5. В треугольнике ABC стороны AB, BC и AC равны c, a и b соответственно. Найдите радиус полукруга, вписанного в данный треугольник, если центр O полукруга принадлежит стороне AB (рис. 77, *а*).



а) *б*)

Рис. 77

Дано: $\triangle ABC$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, O — центр вписанного полукруга.

Найти: r.

Решение.

1) Пусть K и E — точки касания полукруга со сторонами AC и CB соответственно. Соединим центр O с точками K, C и E (рис. 77, *б*).

2) Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, значит, OK и OE являются высотами треугольников AOC и BOC соответственно. Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей треугольников AOC и BOC. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot OK + \frac{1}{2} BC \cdot OE = \frac{r}{2}(AC + BC) = \frac{r}{2}(a + b).$$

Отсюда получаем, что $r = \frac{2S_{ABC}}{a+b}$.

3) По формуле Герона $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Таким образом, $r = \frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Ответ: $\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

3. Решение треугольников. Решить треугольник — значит по трем его элементам найти другие его элементы. Приведем примеры задач на решение треугольника.

Задача 6 (*нахождение элементов треугольника по двум сторонам и углу между ними*). Даны две стороны a и b треугольника и угол C между ними. Найдите третью сторону и два других его угла (рис. 78).

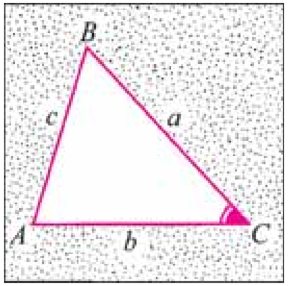


Рис. 78

Решение.

1) По теореме косинусов находим сторону $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$.

2) Зная сторону c, по теореме синусов теперь можем записать $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. Отсюда находим $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$.

3) Зная $\sin A$, находим угол A, а затем находим $\angle B=180°-(\angle A+\angle C)$.

Ответ: $c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}$, $\sin A=\frac{a\sin C}{c}$, $\angle B=180°-$ $-(\angle A+\angle C)$.

Задача 7 (*нахождение элементов треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам*). Дана сторона $BC=a$ треугольника ABC и два прилежащих к ней угла B и C (рис. 79). Найдите угол A и стороны AB и AC.

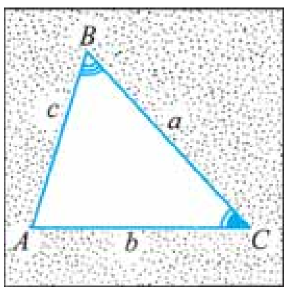


Рис. 79

Решение.

1) Находим $\angle A=180°-(\angle B+\angle C)$.

2) По теореме синусов имеет место равенство $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$. Отсюда находим, что $b=\frac{a\sin B}{\sin A}$.

3) Аналогично по теореме синусов

$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$. Отсюда $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$.

Ответ: $\angle A=180°-(\angle B+\angle C)$, $AB=\frac{a\sin C}{\sin A}$, $AC=\frac{a\sin B}{\sin A}$.

Задача 8 (*нахождение элементов треугольника по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них*). Даны две стороны a и b треугольника и угол A. Найдите неизвестные углы треугольника и третью сторону.

Решение.

1) Найдем синус угла B. По теореме синусов $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$. Отсюда находим $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$. Если $\sin B\leqslant 1$, то задача имеет решение, если $\sin B>1$, то задача не имеет решения. Возможно, что задаче удовлетворяет два значения угла, т.е. задача имеет два решения.

2) Теперь можем найти $\angle C=180°-(\angle B+\angle A)$.

3) Найдем сторону c. По теореме синусов $\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$. Отсюда находим $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$.

Ответ: $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, $\angle C=180°-(\angle B+\angle A)$, $c=\frac{b\sin C}{\sin B}$.

Задача 9 (*нахождение углов треугольника по трем сторонам*). Даны стороны a, b и c треугольника ABC. Найдите углы этого треугольника.

1) По теореме косинусов находим $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2cb}$.

2) Синус угла B найдем по теореме синусов: $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

3) Теперь находим $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)$.

Ответ: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2cb}$, $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$, $\angle C=180°-(\angle A+\angle B)$.

Задачи к § 2

I

1. В треугольнике длины двух сторон равны 3 см и 8 см, а угол между этими сторонами равен 120°. Вычислите длину третьей стороны треугольника.

2. Вычислите длину стороны треугольника, лежащей против угла в 135°, если длины двух других сторон равны $\sqrt{2}$ см и 5 см.

3. В треугольнике ABC угол B равен 60°, $AB=2$ см, $AC=\sqrt{7}$ см. Вычислите длину стороны BC.

4. Длины двух сторон треугольника равны 6 см и 10 см, а угол между ними равен 60°. Вычислите периметр треугольника.

5. Длины сторон треугольника равны 3 см, 5 см и 7 см. Вычислите градусную меру угла треугольника, противолежащего большей стороне.

6. Длина одной из сторон треугольника равна 13 см, две другие образуют угол 120°, а их длины относятся как 7 : 8. Вычислите длины этих сторон.

7. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, если длины его сторон равны $3\sqrt{2}$ см и 7 см, а угол между его сторонами равен 135°.

8. Длина одной из сторон параллелограмма равна 2 см, а его площадь — 4 см^2. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма, если градусная мера его острого угла равна 30°.

9. Тупой угол параллелограмма равен 150°, а длина одной из его сторон $2\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь параллелограмма, если длина его большей диагонали равна $\sqrt{33}$ см.

10. Длины сторон треугольника равны 5 см, 16 см и 19 см. Вычислите градусную меру угла, лежащего против большей стороны.

11. Угол параллелограмма равен 45°, а длины сторон — 17 см и $7\sqrt{2}$ см. Вычислите длину большей стороны параллелограмма и его площадь.

12. Смежные стороны параллелограмма равны a и b, а один из его углов равен α. Найдите диагонали параллелограмма.

13. Диагонали параллелограмма равны d_1 и d_2, а угол между диагоналями равен φ. Найдите стороны параллелограмма.

14. В параллелограмме биссектриса тупого угла, равного 120°, делит сторону параллелограмма на отрезки 15 см и 10 см, считая от вершины острого угла. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма.

15. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине C равен 120°, а длина основания $AB = 2\sqrt{15}$ см. Вычислите длину медианы AF.

16. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°, длина медианы AT равна 7 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

17. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD перпендикулярна стороне BC. Вычислите длину другой диагонали параллелограмма, если $\angle BAD = 60°$ и $BD = 4$ см.

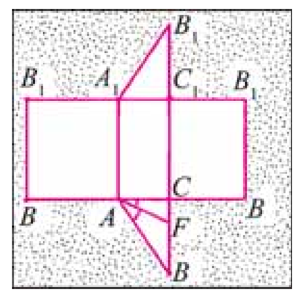
18. Острый угол A параллелограмма $ABCD$ равен 60°. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма, если высота, проведенная к стороне AD, равна $\sqrt{3}$ см и $AD = 1$ см.

19. Длины сторон треугольника равны 5 см, 7 см и 8 см. Вычислите градусную меру угла, лежащего против средней стороны треугольника, и вычислите радиус описанной около него окружности.

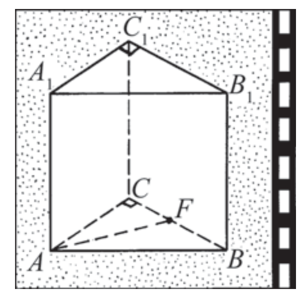
20. Периметр треугольника равен 15 см, а длина одной из его сторон равна 7 см. Вычислите градусную меру угла, противолежащего данной стороне, если биссектриса делит ее в отношении 3 : 5.

21. В остроугольном треугольнике ABC длины сторон AB и BC равны соответственно $\sqrt{3}$ см и 4 см. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника, если его площадь равна $\sqrt{3}$ см^2.

22. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = 60°$, а длина биссектрисы AF равна 4 см. Вычислите площадь грани AA_1B_1B, если радиус описанной около этой грани окружности равен 4 см (рис. 80, *а, б*).



а)



б)

Рис. 80

23. Длины сторон параллелограмма равны 5 см и 8 см, а острый угол — 60°. Вычислите длины диагоналей параллелограмма.

24. Угол параллелограмма равен 60°, разность длин его сторон равна 2 см, а длина большей диагонали равна 7 см. Вычислите длину меньшей диагонали и площадь параллелограмма.

25. Площадь параллелограмма, один из углов которого равен 120°, равна $40\sqrt{3}$ см^2, а разность длин его сторон равна 11 см. Вычислите длины диагоналей параллелограмма.

26. Решите треугольник ABC, если $AB = \sqrt{3}$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 75°$.

27. Решите треугольник ABC, если $BC = 3\sqrt{2}$ см, $AC = 1$ см, $\angle C = 135°$.

28. Решите треугольник ABC, если $AB = 8\sqrt{2}$ см, $BC = 10$ см и $\angle A = 45°$.

29. Длина одной из сторон параллелограмма на 4 см больше длины другой. Вычислите периметр параллелограмма, если одна из его диагоналей образует со сторонами параллелограмма углы 30° и 45°.

30. Вершины треугольника делят описанную около него окружность в отношении 2 : 4 : 6. Вычислите радиус окружности, если длина наименьшей стороны равна 8 см.

II

31. В треугольнике ABC его стороны a, b и c, а медианы m_a, m_b и m_c. Докажите, что $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

32. В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD больше боковой стороны AB на 8 см, а высота, проведенная из вершины B к стороне AD, делит ее на отрезки 8 см и 20 см. Вычислите длину большей диагонали параллелограмма.

33. Вычислите площадь параллелограмма, если длины его сторон равны 6 см и 4 см, а угол между диагоналями равен 60°.

34. Вычислите длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если длины сторон AB и AD равны соответственно 13 см и 16 см, а длина медианы BF треугольника ABD равна 9 см.

35. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна диагонали BD. Около треугольника ABD описана окружность, которая делит большую диагональ параллелограмма на отрезки, равные 65 см и 16 см. Вычислите длины сторон параллелограмма.

36. Острый угол параллелограмма равен α. Найдите площадь параллелограмма и его диагонали, если m и n — расстояния от точки пересечения диагоналей до прямых, содержащих стороны параллелограмма.

37. Длины сторон треугольника равны 11 см, 12 см и 13 см. Вычислите длину медианы, проведенной к большей стороне.

38. Длина большей диагонали параллелограмма равна 14 см, а меньшая делится перпендикуляром, проведенным из вершины острого угла, на отрезки 2 см и 6 см. Вычислите длины сторон параллелограмма.

39. Длины двух сторон треугольника равны 3 см и 5 см, а длина медианы, проведенной к третьей стороне, равна 3,5 см. Вычислите градусную меру угла треугольника между заданными сторонами.

40. В треугольник вписана окружность радиуса 3 см. Вычислите длины сторон треугольника, если одна из них делится точкой касания на отрезки 3 см и 4 см.

41. Параллелограмм $PTKE$ расположен так, что его вершины E и K лежат на стороне AC треугольника ABC, вершины P и T на сторонах AB и BC соответственно, а диагонали параллельны сторонам. Вычислите длины сторон треугольника, если $EK = 3$ см, $PE = 5$ см, $PK = 6$ см.

Вопросы ко второй главе

1. Площадь треугольника ABC равна 3 см^2, а длины двух его сторон равны 2 см и 6 см. Верно ли, что угол между данными сторонами равен $60°$?

2. Верно ли, что синус угла треугольника ABC можно найти по формуле $\sin\alpha = \frac{2S}{ab}$, где S — площадь треугольника, $AB = c$, $AC = b$, α — угол, лежащий против стороны $BC = a$?

3. Два угла треугольника равны α и β. Сторона, лежащая против угла α, равна m. Верно ли, что сторона, лежащая против угла β, равна $\frac{m\sin\beta}{\sin\alpha}$?

4. Радиус окружности, описанной около треугольника, равен R, а один из его углов равен φ. Верно ли, что сторона, лежащая против угла φ, равна $2R\sin\varphi$?

5. Градусная мера угла при вершине равнобедренного треугольника равна $120°$, а длина боковой стороны равна a. Чему равен радиус окружности, описанной около данного треугольника?

6. Градусная мера угла при основании равнобедренного треугольника равна $15°$, а радиус описанной окружности равен R. Найдите основание треугольника.

7. Чему равна площадь выпуклого четырехугольника, если его диагонали взаимно перпендикулярны и равны m и n?

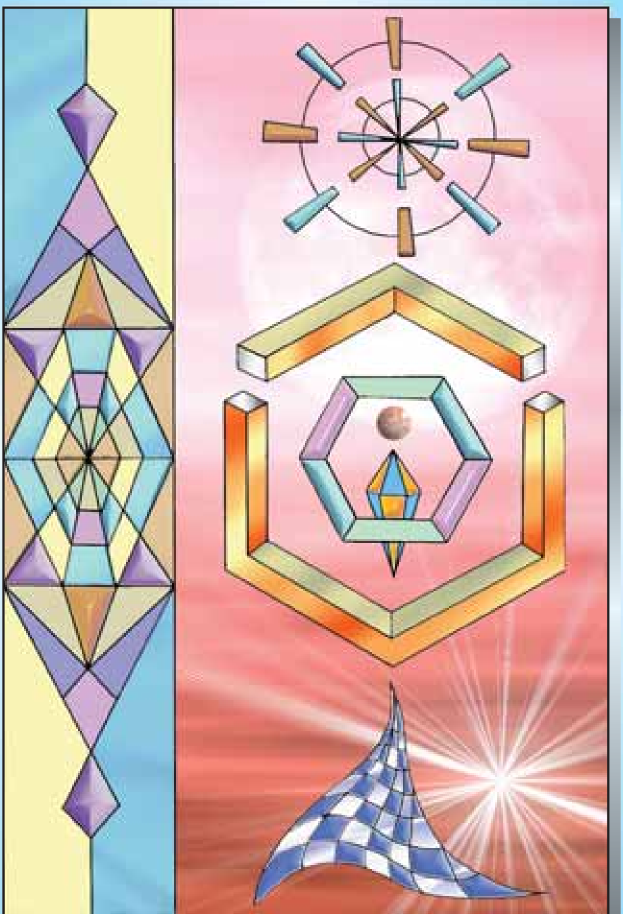
8. В равнобедренном треугольнике основание равно a, а боковая сторона равна p. Найдите медиану, проведенную к боковой стороне данного треугольника.

9. При каком условии площадь выпуклого четырехугольника равна $\frac{1}{2}mn$, где m и n — длины диагоналей четырехугольника?

③

Правильные многоугольники. Длина окружности и площадь круга. Координатный метод

Правильные многоугольники



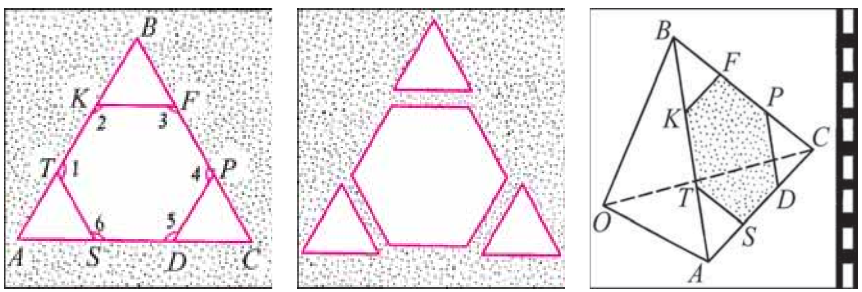
Глава 3

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА. КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД

§ 1. Правильные многоугольники

1. Правильный многоугольник. В предыдущих классах уже были изучены свойства *равностороннего треугольника* и *квадрата*. Каждая из этих фигур обладает тем свойством, что у них все углы и все стороны равны. Указанные геометрические фигуры служат примерами *правильных многоугольников*, свойства которых и рассматриваются в данном параграфе.

Определение. Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого все углы равны и все стороны равны.



а) *б)* *в)*

Рис. 81

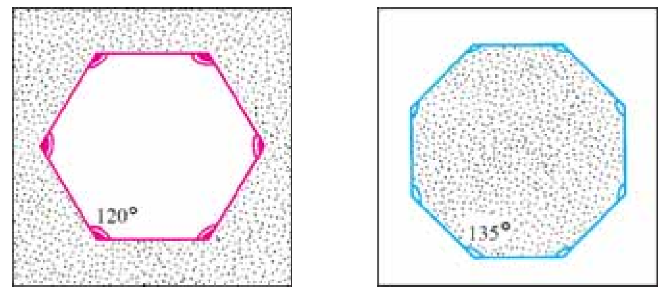
Рассмотрим пример. Пусть ABC — равносторонний треугольник. Разделим каждую его сторону на три равные части, как показано на рисунке 81, *а*. Каждый из треугольников ATS, KBF и DPC является равносторонним. Отсюда следует, что $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = \angle 5 =$ $= \angle 6 = 180° - 60° = 120°$. Кроме того, $ST = TK = KF = FP = PD = DS$. Таким образом, шестиугольник $TKFPDS$ является правильным.

Модель этого правильного многоугольника получится, если от листа бумаги, имеющего форму равностороннего треугольника, отрезать равные части, имеющие форму равносторонних и равных между собой треугольников, как показано на рисунке 81, *б*.

Если треугольник ABC является гранью правильного тетраэдра $BOAC$ (правильный тетраэдр — треугольная пирамида, у которой все

четыре грани — равные равносторонние треугольники), а каждая пара точек T, K; F, P и D, S делит соответствующее ребро на три равные части, то $TKFPDS$ — правильный шестиугольник, лежащий на грани ABC (рис. 81, *в*).

Ранее в § 1 учебного пособия «Геометрия, 9» была доказана теорема о том, что сумма углов любого выпуклого n-угольника равна $180° (n - 2)$. Из доказанной теоремы и определения правильного n-угольника следует, что каждый его угол $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$. Например, для правильного шестиугольника $\alpha_6 = \dfrac{180°(6-2)}{6} = 120°$ (рис. 82, *а*), а для правильного восьмиугольника $\alpha_8 = \dfrac{180°(8-2)}{8} = 135°$ (рис. 82, *б*).



а) *б)*

Рис. 82

2. Окружность, описанная около правильного многоугольника. Вы знаете, что около правильного треугольника и правильного четырехугольника можно описать окружность. Теперь изучим вопрос о существовании окружности, описанной около правильного многоугольника.

Определение. Окружность называется описанной около многоугольника, если все его вершины лежат на этой окружности. При этом многоугольник называется вписанным в окружность.

Оказывается, что около любого правильного многоугольника можно описать окружность. Докажем следующую теорему.

Теорема 1 (*об окружности, описанной около правильного многоугольника*). Около любого правильного многоугольника можно описать окружность и притом только одну.

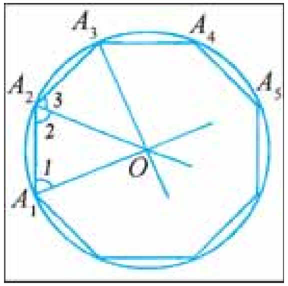


Рис. 83

Д о к а з а т е л ь с т в о.

I. *Докажем существование окружности.*

1) Пусть $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ — правильный многоугольник. Докажем, что существует точка, равноудаленная от всех его вершин. Пусть точка O — точка пересечения биссектрис углов A_1 и A_2. Соединим точку O отрезками со всеми вершинами многоугольника и докажем, что $OA_1 = OA_2 = ... = OA_{n-1} = OA_n$ (рис. 83).

2) Так как $\angle A_1 = \angle A_2$ и A_1O и A_2O — биссектрисы, то $\angle 1 = \angle 2$, т. е. треугольник OA_1A_2 — равнобедренный, а значит, $OA_1 = OA_2$.

3) Заметим, что треугольник OA_1A_2 равен треугольнику OA_2A_3 по двум сторонам и углу между ними ($A_1A_2 = A_2A_3$, OA_2 — общая сторона, $\angle 2 = \angle 3$). Из равенства этих треугольников следует, что $OA_3 = OA_1$. Так же можно доказать, что $OA_4 = OA_2$, $OA_5 = OA_3$ и т. д.

4) Таким образом, $OA_1 = OA_2 = ... = OA_{n-1} = OA_n$, т. е. точка O равноудалена от вершин многоугольника. Следовательно, окружность ω с центром в точке O и радиусом OA_1 является описанной около многоугольника. Из доказательства следует, что *центром окружности, описанной около правильного многоугольника, является точка пересечения биссектрис углов этого многоугольника.*

II. *Докажем, что описанная окружность единственная.*

Пусть существует еще одна окружность ω_1, которая описана около правильного многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Тогда эта окружность является описанной, например, около треугольника $A_1A_2A_3$. Но около треугольника $A_1A_2A_3$ можно описать единственную окружность, следовательно, окружности ω и ω_1 совпадают, т.е. около многоугольника $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$ можно описать единственную окружность.

Теорема доказана.

3. Окружность, вписанная в правильный многоугольник. Известно, что в любой правильный треугольник можно вписать окружность. Рассмотрим вопрос о существовании окружности, вписанной в правильный многоугольник.

О п р е д е л е н и е. Окружность называется вписанной в многоугольник, если все стороны многоугольника касаются окружности. При этом многоугольник называется описанным около окружности.

Докажем, что в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Т е о р е м а 2 (*об окружности, вписанной в правильный многоугольник*). В любой правильный многоугольник можно вписать окружность и притом только одну.

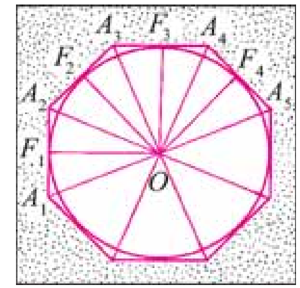


Рис. 84

I. *Докажем существование окружности.*

1) Пусть $A_1A_2A_3 ... A_{n-1}A_n$ — правильный многоугольник. Докажем, что существует точка, равноудаленная от прямых, содержащих стороны многоугольника (рис. 84).

2) Пусть точка O — центр описанной около многоугольника окружности. Теперь проведем высоты OF_1, OF_2, ..., OF_{n-1}, OF_n соответственно треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1. Как было доказано в предыдущей теореме, эти треугольники равны между собой, следовательно, равны их высоты, т. е. $OF_1 = OF_2 = ... = OF_n$.

3) Таким образом, окружность ω с центром в точке O и радиусом OF_1 проходит через точки $F_1, F_2, ..., F_n$ и касается сторон многоугольника в этих точках, т. е. эта окружность вписана в правильный многоугольник $A_1A_2A_3 ... A_{n-1}A_n$.

Заметим также, что центр O вписанной в правильный многоугольник окружности есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам многоугольника.

Подчеркнем, что *для правильного многоугольника центр вписанной окружности совпадает с центром описанной окружности.*

II. *Докажем, что вписанная окружность единственная.*

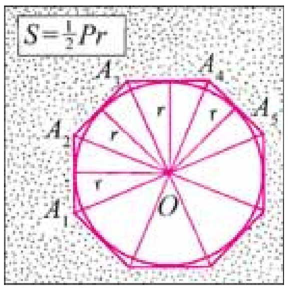
Предположим, что существует еще одна окружность ω_1, вписанная в правильный многоугольник $A_1A_2A_3 ... A_{n-1}A_n$. Тогда центр O_1 этой окружности равноудален от сторон многоугольника, т. е. точка O_1 лежит на каждой из биссектрис углов многоугольника, а значит, совпадает с точкой O пересечения этих биссектрис. Радиус этой окружности равен расстоянию от точки O до сторон многоугольника, т. е. он равен OF_1. Следовательно, окружности ω и ω_1 совпадают.

Теорема доказана.

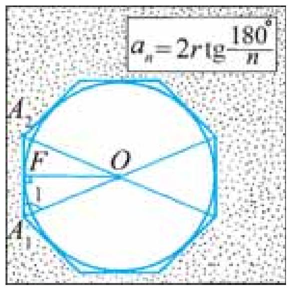
Центром правильного многоугольника называется центр его вписанной и описанной окружностей.

4. Выражение элементов треугольника через радиус вписанной или описанной окружностей. Пусть S — площадь правильного n-угольника, a_n — его сторона, P — периметр, а r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей соответственно.

1) ***Площадь S правильного n-угольника, описанного около окружности, можем найти через периметр P и радиус r вписанной окружности по формуле*** $S = \frac{1}{2}Pr$.



а)



б)

Рис. 85

Соединим центр O правильного многоугольника с его вершинами (рис. 85, *а*). Тогда многоугольник разбивается на n равных треугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{2}a_n r$. Следовательно, $S = n \cdot \frac{1}{2}a_n r = \frac{1}{2}(na_n)\,r = \frac{1}{2}Pr$.

Что и требовалось доказать.

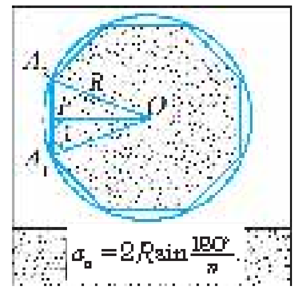
2) ***Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус r вписанной окружности по формуле*** $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$.

Соединим центр многоугольника с вершинами A_1 и A_2 и проведем высоту OF равнобедренного треугольника OA_1A_2 (рис. 85, *б*). Так как многоугольник правильный, то $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$. В равнобедренном треугольнике OA_1A_2 высота OF, проведенная к основанию, является биссектрисой, следовательно, $\angle A_1OF = \frac{180^\circ}{n}$. Таким образом, $a_n = A_1A_2 = 2A_1F = OA_1\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n} = 2r\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

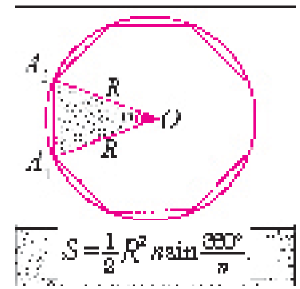
Что и требовалось доказать.

Так как $S = \frac{1}{2}Pr$ и $a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}$, то площадь $S = nr^2\,\mathrm{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

3) ***Сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус R описанной окружности по формуле*** $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.



а)



б)

Рис. 86

Пусть OF — высота равнобедренного треугольника OA_1A_2 (рис. 86, *а*). Тогда $\angle A_1OF = \frac{1}{2}\angle A_1OA_2 = \frac{180^\circ}{n}$. В прямоугольном треугольнике A_1FO катет $A_1F = OA_1\sin\frac{180^\circ}{n} = R\sin\frac{180^\circ}{n}$. Таким образом, $a_n = 2A_1F = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Что и требовалось доказать.

Для *правильного треугольника* $(n=3)$, *квадрата* $(n=4)$ и *правильного шестиугольника* $(n=6)$ получаем соответственно формулы: $a_3 = R\sqrt{3}$; $a_4 = \sqrt{2}$; $a_6 = R$.

4) ***Площадь S правильного n-угольника можем найти по формуле*** $S = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^\circ}{n}$.

Соединим вершины правильного n-угольника с его центром (рис. 86, *б*). Тогда многоугольник разбивается на n равных треугольников. Следовательно, $S = nS_{OA_1A_2} = n\left(\frac{1}{2}OA_1 \cdot OA_2\sin\varphi\right) = n\left(\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^\circ}{n}$. Что и необходимо было доказать.

5) ***Радиус r вписанной окружности выражается через радиус R описанной окружности по формуле*** $r = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$.

В прямоугольном треугольнике OA_1F $r = OF = R\sin\left(90^\circ - \dfrac{180^\circ}{n}\right) = R\cos\dfrac{180^\circ}{n}$ (рис. 86, *а*).

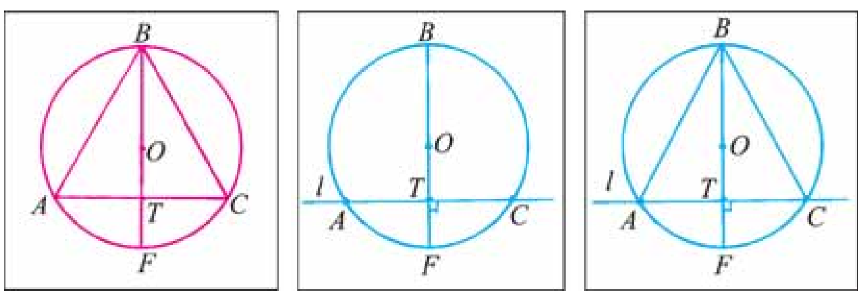
Что и требовалось доказать.

5. Построение правильных многоугольников. Вопрос о построении правильного треугольника уже рассматривался ранее. Покажем, каким образом можно с помощью циркуля и линейки построить правильный треугольник, вписанный в окружность.

Задача 1. Постройте правильный треугольник, вписанный в данную окружность.

Поиск решения.

Пусть правильный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Проведем диаметр BF этой окружности, обозначим буквой T точку пересечения этого диаметра со стороной AC. Тогда положение точки T на отрезке OF характеризуется равенством $OT = TF$, *так как* $OT = \frac{1}{2}OF = \frac{1}{2}R$ (задача 13, § 4, гл. 1). *Кроме того,* $AC \perp BF$. *Теперь можем осуществить построение* (рис. 87, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 87

Построение.

1) Проводим диаметр BF окружности и строим точку T — середину отрезка OF (рис. 87, *б*).

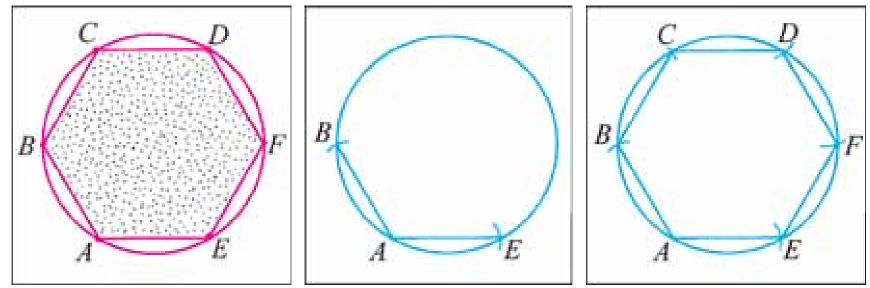
2) Строим прямую l, которая проходит через точку T и перпендикулярна диаметру BF (рис. 87, *б*).

3) Отмечаем точки A и C пересечения прямой l с окружностью.

4) Строим отрезки BA и BC (рис. 87, *в*). Треугольник ABC — искомый.

Докажите самостоятельно, что построенный треугольник правильный.

Задача 2. Постройте правильный шестиугольник, сторона которого равна данному отрезку a.



а) *б)* *в)*

Рис. 88

Поиск решения.

Пусть ABCDFE — правильный шестиугольник, сторона которого равна a. Рассмотрим описанную около этого шестиугольника окружность. Известно, что радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника, равен его стороне, т. е. $R = AB = BC = CD = DF = FE = EA = a$ (рис. 88). *Этим можем воспользоваться для построения шестиугольника.*

Построение.

1) Строим окружность с произвольным центром O и радиуса a: $\omega\,(O;\, a)$.

2) Выбираем на этой окружности произвольную точку A и строим окружность $\omega_1\,(A;\, a)$. Отмечаем точки B и E пересечения окружности ω с окружностью ω_1 (рис. 88, *б*).

3) Далее строим точку C, которая является одной из точек пересечения окружности ω и окружности $\omega_2\,(B;\, a)$. Аналогично строим точки D и F. Шестиугольник $ABCDFE$ — искомый (рис. 88, *в*).

Заметим, что результат задачи 1 позволяет построить правильный шестиугольник, если построен правильный треугольник.

Задачи к § 1

I

1. Найдите углы правильного: а) пятиугольника; б) десятиугольника; в) двенадцатиугольника.

2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол равен: а) 150°; б) 156°; в) 144°?

3. Площадь квадрата, описанного около окружности, равна 16 см^2. Вычислите площадь квадрата, вписанного в окружность.

4. Периметр квадрата, вписанного в окружность, равен 12 см. а) Вычислите радиус данной окружности; б) вычислите радиус окружности, вписанной в квадрат; в) вычислите периметр квадрата, описанного около окружности.

5. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна 8 см^2. а) Вычислите радиус этой окружности; б) вычислите длину стороны правильного треугольника, вписанного в окружность; в) вычислите длину стороны квадрата, описанного около окружности.

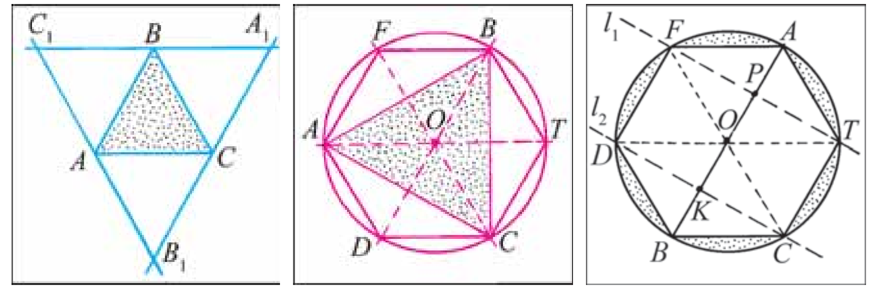
6. Докажите, что отношение площади квадрата, вписанного в окружность, к площади квадрата, описанного около этой окружности, равно 1 : 2.

7. В окружность радиуса 12 см вписан правильный треугольник. а) Вычислите высоту треугольника; б) вычислите расстояние от центра окружности до прямой, содержащей его сторону; в) вычислите длину стороны треугольника; г) вычислите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

8. Периметр правильного треугольника, описанного около окружности, равен $18\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь квадрата, описанного около этой окружности.

9. Вычислите площадь правильного треугольника, описанного около окружности радиуса 4 см.

10. *ABC* — правильный треугольник, A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника *ABC* и параллельных его противолежащим сторонам (рис. 89, *а*). Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — правильный.



а) *б)* *в)*

Рис. 89

11. Правильный треугольник *ABC* вписан в окружность с центром в точке *O*. Точки *F*, *T* и *D* — точки пересечения лучей *CO*, *AO* и *BO* с окружностью соответственно (рис. 89, *б*). Докажите, что шестиугольник *AFBTCD* — правильный.

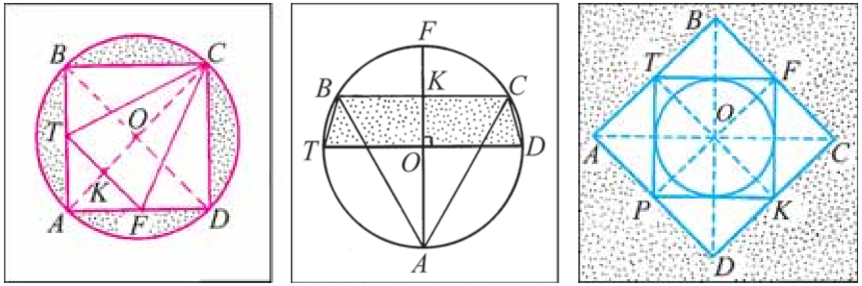
12. *ABC* — правильный треугольник с центром в точке *O*, точки *F*, *T* и *K* — точки, симметричные центру *O* относительно прямых *AB*, *BC* и *AC* соответственно. Докажите, что шестиугольник *AFBTCK* — правильный.

13. Отрезок *AB* — диаметр окружности с центром в точке *O*. Через середины *P* и *K* радиусов *AO* и *BO* проведены прямые l_1 и l_2, которые пересекают окружность в точках *F*, *T* и *D*, *K* соответственно. Докажите, что шестиугольник *FATCBD* — правильный (рис. 89, *в*).

14. Длина стороны правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

15. В окружность радиуса *R* вписан квадрат *ABCD*. Точки *T* и *F* — середины сторон *AB* и *AD* соответственно (рис. 90, *а*). Найдите площадь треугольника *TCF*.

16. В окружность с центром в точке *O* и радиуса *R* вписан правильный треугольник *ABC*, отрезки *AF* и *TD* — взаимно перпендикулярные диаметры окружности (рис. 90, *б*). Найдите площадь четырехугольника *TBCD*.



а) б) в)

Рис. 90

17. Точки T, F, K и P — середины сторон AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно (рис. 90, *в*). Вычислите площадь квадрата $ABCD$, если радиус окружности, вписанной в четырехугольник $PTFK$, равен 10 см.

18. Радиус окружности, описанной около правильного четырехугольника $ABCD$, равен R. Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон четырехугольника $ABCD$.

19. Длина меньшей диагонали правильного шестиугольника равна 10 см. Вычислите радиус окружности, описанной около этого шестиугольника.

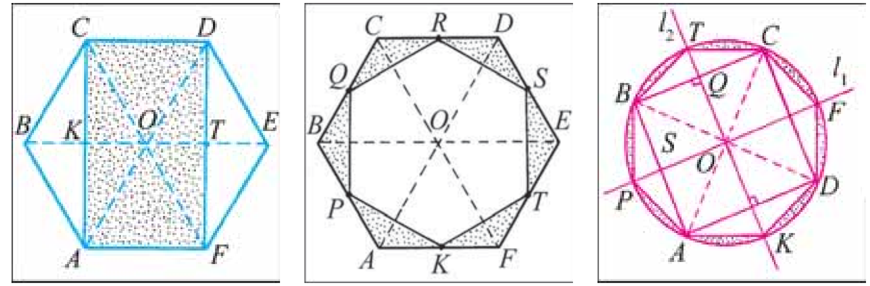
20. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Вычислите площадь этого шестиугольника, если площадь треугольника BCD равна 10 см^2.

21. В окружность радиуса R вписан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BDF.

22. Докажите, что площадь S правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса R, можно найти по формуле $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$.

23. Докажите, что площадь S правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса r, можно найти по формуле $S = 2\sqrt{3}r^2$.

24. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, точка O — его центр. Докажите, что: а) треугольник BDF — правильный; б) четырехугольник $ABCO$ — ромб.



а) б) в)

Рис. 91

25. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник. Докажите, что четырехугольник $ACDF$ является прямоугольником. Найдите площадь прямоугольника $ACDF$, если радиус окружности, описанной около шестиугольника, равен R (рис. 91, *а*).

26. Докажите, что середины сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$ являются вершинами правильного шестиугольника $PQRSTK$ (рис. 91, *б*). Найдите отношение периметров этих шестиугольников.

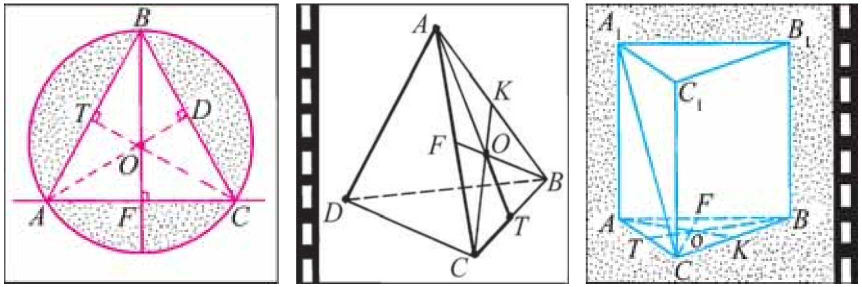
27. $ABCD$ — квадрат, вписанный в окружность с центром в точке O. Через центр квадрата перпендикулярно его сторонам проведены прямые l_1 и l_2, которые пересекают окружность в точках F, P и T, K соответственно (рис. 91, *в*). Докажите, что восьмиугольник $APBTCFDK$ является правильным.

28. Периметр квадрата, описанного около окружности, равен P. Найдите периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность.

29. Периметр правильного шестиугольника, вписанного в окружность, на 3 см меньше периметра правильного четырехугольника, описанного около этой окружности. Вычислите радиус окружности.

30. Площадь правильного треугольника ABC равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите расстояние от центра O описанной около треугольника окружности до прямой, содержащей его сторону (рис. 92, *а*).

31. Радиус окружности, описанной около грани ABC правильного тетраэдра $ABCD$, равен 6 см. Вычислите длину ломаной $DACTO$, где точка O — центр окружности, описанной около грани ABC, точка T — середина ребра BC (рис. 92, *б*).



а) *б)* *в)*

Рис. 92

32. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основаниями которой служат правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 92, *в*). Вычислите радиус окружности, описанной около основания призмы, если все ребра призмы равны между собой, а длина диагонали боковой грани призмы равна $3\sqrt{2}$ см.

33. В окружность вписан правильный треугольник ABC. Постройте правильный шестиугольник, вписанный в окружность, для которого точки A, B и C служат вершинами.

34. Постройте: а) правильный четырехугольник, вписанный в окружность; б) правильный треугольник, описанный около окружности; в) правильный четырехугольник, описанный около окружности; г) правильный восьмиугольник, вписанный в окружность.

II

35. Найдите отношение площади правильного шестиугольника, описанного около окружности, к площади правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

36. Центры двух окружностей расположены по разные стороны от их общей хорды, которая равна a. Найдите расстояние между центрами этих окружностей, если в одной окружности хорда служит стороной правильного вписанного треугольника, а в другой — стороной вписанного квадрата.

37. Площадь вписанного в окружность правильного шестиугольника равна S. Найдите площадь правильного четырехугольника, вписанного в эту окружность.

38. С помощью циркуля и линейки постройте правильный треугольник по отрезку m, равному его высоте.

39. С помощью циркуля и линейки постройте правильный шестиугольник по отрезку a, равному его меньшей диагонали.

40. Дан равносторонний треугольник ABC. С помощью циркуля и линейки постройте равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, что $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$ и стороны A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 перпендикулярны сторонам AC, AB, BC соответственно.

41. В квадрате $ABCD$ точки K, P, E и T — середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что четырехугольник, ограниченный прямыми BT, PD, CK и AE, является квадратом. Найдите его площадь, если площадь квадрата $ABCD$ равна S.

42. В квадрат $ABCD$, сторона которого равна a, вписана окружность. Окружность касается стороны CD в точке E. Найдите длину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

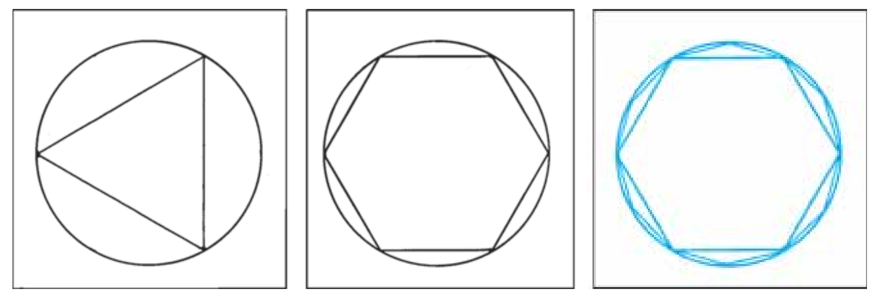
43. В квадрат со стороной a вписана окружность. Найдите радиус меньшей окружности, которая касается этой окружности и сторон квадрата.

44. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других сторон на отрезки, длины которых равны 2 см и 23 см. Вычислите радиус окружности.

Длина окружности

§ 2. Длина окружности

1. Понятие длины окружности. Рассмотрим вопрос о вычислении длины окружности. Пусть в окружность вписан правильный n-угольник. Если число n сторон правильного n-угольника, вписанного в окружность, неограниченно возрастает, то геометрическая фигура, образованная его сторонами, все меньше и меньше отличается от окружности (рис. 93, *а, б, в*). В вузовском курсе математического анализа устанавливается, что существует число, к которому стремятся периметры P_n правильных n-угольников, вписанных в окружность при неограниченном возрастании числа их сторон. Это число называется длиной окружности. Таким образом, *за длину окружности принимается число, к которому стремятся периметры вписанных в окружность правильных n-угольников при неограниченном увеличении числа их сторон.*



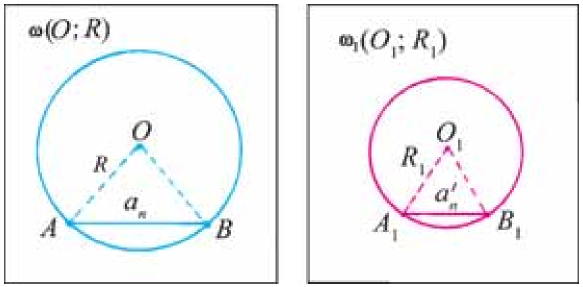
а) *б)* *в)*

Рис. 93

Длина окружности зависит от ее радиуса, окружность большего радиуса имеет большую длину. Вместе с тем можно доказать, что отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное.

2. Теорема об отношении длины окружности к ее диаметру. Докажем теорему, которая характеризует отношение длины окружности к ее диаметру.

Теорема (*об отношении длины окружности к ее диаметру*). **Отношение длины окружности к ее диаметру есть число постоянное для всех окружностей.**



а) б)

Рис. 94

Дано: $\omega(O; R)$, $\omega_1(O_1; R_1)$ — окружности, C, C_1 — длины окружностей.
Доказать: $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$.

Доказательство.

1) Впишем в каждую из окружностей правильные n-угольники. Пусть a_n, a_n' — стороны этих многоугольников, P_n, P_n' — соответственно их периметры (рис. 94, *а, б*).

2) Теперь воспользуемся формулой, по которой находится сторона правильного n-угольника через радиус описанной окружности. Учитывая эту формулу (§ 1, п. 4, гл. 3), можем записать равенства $P_n = n \cdot a = n \cdot 2R\sin\frac{180°}{n}$ и $P_n' = n \cdot a_n' = n \cdot 2R_1\sin\frac{180°}{n}$. Следовательно, верно равенство $\frac{P_n}{P_n'} = \frac{2R}{2R_1}$ (1).

3) Это равенство верно при любом значении n. Будем неограниченно увеличивать число n, тогда периметр P_n первого многоугольника стремится к длине C первой окружности, а периметр P_n' второго многоугольника стремится к длине C_1 другой окружности, т. е. $\frac{P_n}{P_n'}$ стремится к $\frac{C}{C_1}$.

4) Таким образом, $\frac{C}{C_1} = \frac{2R}{2R_1}$. Отсюда следует, что $\frac{C}{2R} = \frac{C_1}{2R_1}$. Значит, отношение длины окружности к ее диаметру одно и то же для всех окружностей.

Теорема доказана.

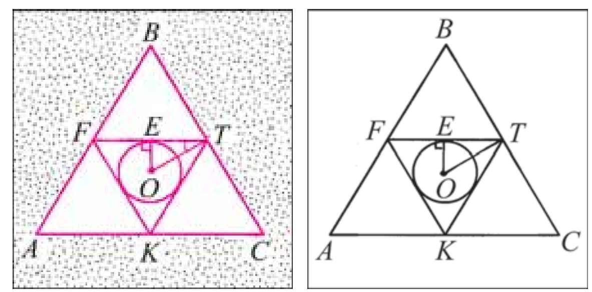
Число, равное отношению длины окружности к ее диаметру, обозначается строчной греческой буквой π (читается «пи»). Доказано, что число π — иррациональное, т. е. выражается бесконечной непериодической десятичной дробью. Приближенное значение числа π с точностью до восьми знаков после запятой такое:

$\pi \approx 3{,}14159265$. При решении задач в школьной практике пользуются приближенным значением числа π с точностью до сотых: $\pi \approx 3{,}14$.

3. Длина окружности. Длина дуги окружности. Для нахождения формулы длины окружности воспользуемся равенством $\frac{C}{2R} = \pi$. Отсюда следует, что *длина окружности радиуса R находится по формуле* $C = 2\pi R$ или по формуле $C = \pi D$, где D — диаметр окружности.

Теперь выведем формулу для вычисления длины l дуги, градусная мера которой равна α. Пусть данная дуга является дугой окружности радиуса R. Так как длина всей окружности равна $2\pi R$, то длина дуги в 1° равна $\frac{2\pi R}{360°} = \frac{\pi R}{180°}$. Так как градусная мера дуги равна α, то *длина l этой дуги выражается*: $l = \frac{\pi R\alpha}{180°}$.

Задача 1. Точки F, T и K — середины сторон равностороннего треугольника ABC. Найдите длину окружности, вписанной в треугольник FTK, если сторона треугольника ABC равна a.



а) б)

Рис. 95

Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC = CA = a$, $AF = FB$, $F \in AB$, $BT = TC$, $T \in BC$, $AK = KC$, $K \in AC$.
Найти: длину окружности, вписанной в $\triangle FTK$.

Решение.

Для нахождения длины окружности можем воспользоваться формулой $C = 2\pi r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник FTK. Для нахождения радиуса r воспользуемся тем, что треугольник FTK также является равносторонним.

1) Пусть точка O — центр окружности, вписанной в треугольник FTK, а E — точка касания окружности и стороны FT (рис. 95, *а, б*).

2) Треугольник FTK является равносторонним, так как $FT = TK = KF = \frac{1}{2}AB$. Треугольник TEO — прямоугольный и $\angle EOT = 30°$

($OE \perp FT$ как радиус, проведенный в точку касания, OT — биссектриса угла ETK).

3) В прямоугольном треугольнике TEO катет $OE = ET \operatorname{tg} 30°$.

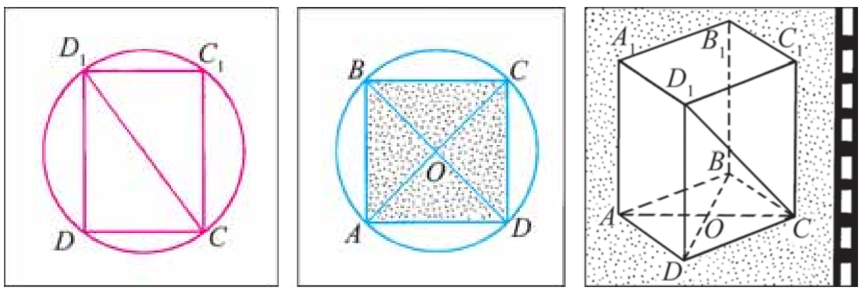
Так как $OE = r$ и $ET = \frac{1}{2} FT = \frac{a}{4}$, то $r = \frac{a}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Заметим, что радиус r можно найти и другим способом: воспользовавшись тем, что треугольник FTK подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$.

Таким образом, длина окружности $C = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{12} = \frac{a\pi\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{a\pi\sqrt{3}}{6}$.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая четырехугольная призма, основаниями которой служат квадраты. Вычислите длину окружности, описанной около боковой грани призмы, если длина окружности, описанной около основания призмы, равна 8π см, а боковое ребро в два раза больше стороны основания призмы.



а) *б)* *в)*

Рис. 96

Решение.

Длина C окружности находится по формуле $C = 2\pi R$. *Данная призма является прямой призмой, основаниями которой служат квадраты, следовательно, все боковые грани являются равными между собой прямоугольниками.* Диагональ грани DD_1CC_1 равна диаметру описанной около него окружности, т. е. $D_1C = 2R$ (рис. 96, *а, б, в*).

1) Пусть $DC = x$, тогда по условию $DD_1 = 2x$. В прямоугольном треугольнике D_1DC гипотенуза $D_1C = \sqrt{DD_1^2 + DC^2} = \sqrt{(2x)^2 + x^2} = x\sqrt{5}$. Таким образом, $2R = x\sqrt{5}$. Теперь необходимо найти x.

2) По условию длина окружности, описанной около квадрата $ABCD$, равна 8π см. Ее диаметр $2R_1$ равен диагонали AC, т. е. $2R_1 = AC = x\sqrt{2}$. Следовательно, из уравнения $\pi x\sqrt{2} = 8\pi$ находим, что $x = 4\sqrt{2}$.

3) Так как $2R = x\sqrt{5}$ и $x = 4\sqrt{2}$, то $2R = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{10}$ (см). Теперь находим $C = 2\pi R = \pi \cdot 4\sqrt{10} = 4\pi\sqrt{10}$ (см).

Ответ: $4\pi\sqrt{10}$ см.

Задачи к § 2

I

1. Площадь квадрата равна 9 см^2. Вычислите длину окружности, описанной около этого квадрата.

2. Длина окружности, описанной около квадрата, равна 16π см. Вычислите периметр квадрата.

3. Периметр квадрата равен 12 см. Вычислите длину окружности, описанной около четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного квадрата.

4. Площадь квадрата равна S. Найдите длину окружности, вписанной в данный квадрат.

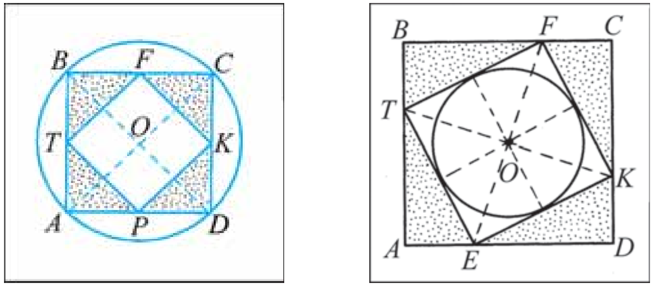
5. Площадь правильного треугольника равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину окружности, описанной около этого треугольника.

6. Длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, равна $2\pi\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр этого треугольника.

7. Периметр правильного треугольника равен 18 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника, вершинами которого служат середины сторон данного правильного треугольника.

8. Площадь равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину окружности, вписанной в этот треугольник.

9. Площадь четырехугольника $TFKP$, вершинами которого служат середины сторон квадрата $ABCD$, равна S. Найдите длину окружности, описанной около квадрата $ABCD$ (рис. 97, *а*).



а) *б)*

Рис. 97

10. Точки T, F, K и E лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$. Вычислите длину окружности, вписанной в четырехугольник $TFKE$, если $AB = 3$ см и $AE = TB = FC = KD = 1$ см (рис. 97, *б*).

11. Длина окружности, описанной около прямоугольника, равна 20π см. Вычислите периметр прямоугольника, если его диагональ образует со стороной угол 30°.

12. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 12 см^2, а его периметр — 14 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника ABC.

13. Отрезок BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B прямоугольника $ABCD$, к его диагонали AC. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольника, если $BF = 6$ см и $AF = 4$ см.

14. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если его площадь равна 48 см^2, а длина одного из катетов — 6 см.

15. Длина окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равна 26π см, а длина одного из его катетов равна 10 см. Вычислите площадь треугольника.

16. Вычислите длину окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, длины катетов которого равны 6 см и 8 см.

17. Одна из диагоналей ромба равна его стороне. Вычислите длину окружности, вписанной в ромб, если его периметр равен 40 см.

18. Длина окружности, вписанной в ромб, равна $2\pi\sqrt{3}$ см. Вычислите площадь этого ромба, если его сторона равна диагонали.

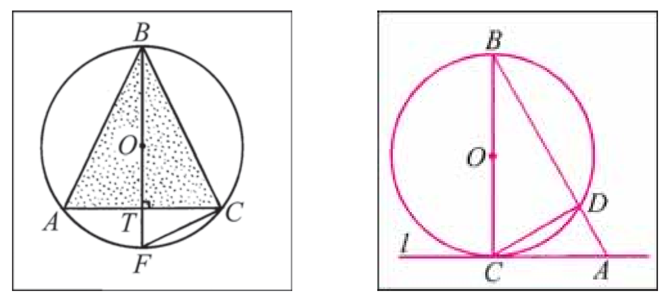
19. Острый угол ромба $ABCD$ равен 60°. Точки T, F, K и P — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно. Найдите длину окружности, описанной около четырехугольника $TFKP$, если сторона ромба равна a.

20. Длина стороны основания равнобедренного треугольника равна 16 см, а угол при его вершине равен 150°. Вычислите длину окружности, описанной около этого треугольника.

21. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°, а длина его основания равна 10 см. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника.

22. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равна $\frac{25}{4}\pi$ см. Вычислите синус угла при основании треугольника, если длина его боковой стороны равна 5 см.

23. Длина окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC, равна 25π см, отрезок BF — диаметр окружности. Вычислите длину хорды FC, если высота, проведенная к основанию AC, равна 16 см (рис. 98, *а*).



а) *б)*

Рис. 98

24. Отрезок BC является диаметром окружности, а в точке C проведена касательная l к окружности, и точка $A \in l$ (рис. 98, *б*). Отрезок AB пересекает окружность в точке D так, что $AD : DB = 1 : 3$. Вычислите длину окружности, если длина хорды $CD = 3$ см.

25. На катете AB прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AC в точке D. Вычислите длину окружности, если $BD = 24$ см и $BC = 30$ см.

26. Длины катетов прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Вычислите длину окружности, диаметром которой служит медиана, проведенная к гипотенузе.

27. В окружность вписана трапеция, одно из оснований которой является диаметром окружности, а острый угол трапеции равен 60°. Вычислите длину окружности, если площадь трапеции равна $12\sqrt{3}$ см^2.

28. Длина стороны треугольника равна 18 см, а прилежащие к ней углы равны 70° и 80°. Вычислите длины дуг, на которые вершины треугольника делят описанную около него окружность.

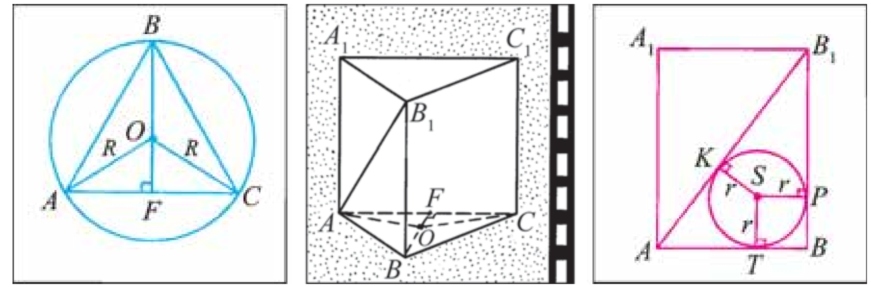
29. Длина стороны основания равнобедренного треугольника равна $2\sqrt{3}$ см, а его угол при основании равен 30°. Вычислите длины дуг, на которые вершины треугольника разбивают окружность, описанную около треугольника.

30. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, служит диаметром окружности. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника, если угол при основании треугольника равен 70°, а его высота, проведенная к основанию, равна 36 см.

31. Угол при основании равнобедренного треугольника равен 75°. Высота, проведенная к основанию треугольника, служит диаметром окружности. Вычислите длину этой высоты, если длина дуги окружности, расположенной внутри треугольника, равна 2π.

32. Один из углов ромба равен 120°, а диагональ, проведенная из этого угла, равна $4\sqrt{3}$ см. Диаметром окружности служит половина большей диагонали ромба. Вычислите длину дуги этой окружности, расположенной внутри ромба.

33. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 12 см, а его острый угол равен 30°. На меньшем катете как на диаметре построена окружность. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.



а) *б)* *в)*

Рис. 99

34. $ABCA_1B_1C_1$ — прямая треугольная призма, основаниями которой служат равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Вычислите длину окружности, вписанной в треугольник ABB_1, если $AA_1 = 4$ см, а длина окружности, описанной около треугольника ABC, равна $2\pi\sqrt{3}$ см (рис. 99, *а, б, в*).

II

35. Отрезок BF — перпендикуляр, проведенный из вершины B к диагонали AC прямоугольника $ABCD$. Вычислите длину окружности, описанной около прямоугольника, если $AF : FC = 1 : 3$ и $AB = 12$ см.

36. Длина основания равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см, а высота, проведенная к его основанию, в два раза меньше боковой стороны. Указанная высота служит диаметром окружности. Вычислите длину дуги окружности, расположенной внутри треугольника.

37. Отрезки BT и BF — перпендикуляры, проведенные из вершины тупого угла ромба $ABCD$ к его сторонам. Вычислите длину окружности, описанной около треугольника ABC, если $\angle ABC = 120°$, а расстояние между основаниями проведенных перпендикуляров равно 6 см.

38. Длина одной из сторон треугольника на 2 см меньше длины другой. Вычислите длину окружности, вписанной в треугольник, если высота делит третью сторону на отрезки длиной 5 см и 9 см.

39. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 20 см и перпендикулярна боковой стороне. Вычислите длину окружности, диаметром которой служит средняя линия трапеции, если длины боковой стороны и большего основания относятся как 3 : 5.

40. Окружность с центром O на гипотенузе AC прямоугольного треугольника касается его катетов AB и BC в точках F и E соответственно. Вычислите длины окружностей, построенных на отрезках AO и CO как на диаметрах, если $AB = 3$ см и $BC = 4$ см.

41. В прямоугольный треугольник вписана полуокружность так, что ее диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит гипотенузу на отрезки 15 см и 20 см. Вычислите длину полуокружности.

42. В равносторонний треугольник вписана окружность. Окружность радиуса r касается этой окружности и сторон треугольника. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

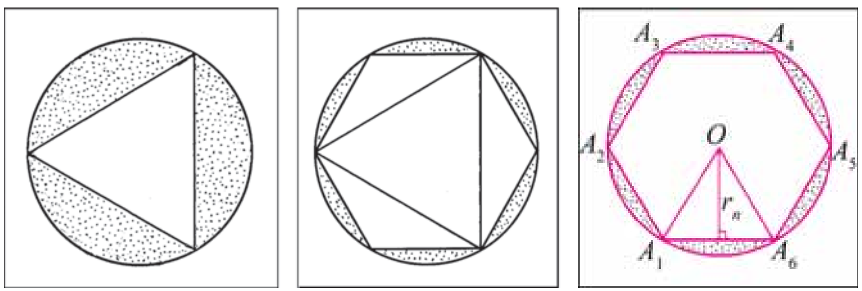
43. Через точку S к окружности проведены прямые l_1 и l_2, которые касаются окружности в точках A и B. Меньшая окружность касается данных прямых и большей окружности в точке F. Найдите длину меньшей окружности, если дуга AFB равна $120°$, а ее длина равна m.

44. Окружность вписана в равнобедренную трапецию, а ее боковая сторона точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 9 см. Вычислите длину окружности, вписанной в трапецию.

Площадь круга. Площадь сектора

§ 3. Площадь круга. Площадь сектора

1. Площадь круга. Рассмотрим вопрос о вычислении площади круга. Пусть в окружность, ограничивающую круг, вписан правильный n-угольник. Если число n сторон правильного n-угольника, вписанного в окружность, неограниченно возрастает, то многоугольник все меньше и меньше отличается от круга (рис. 100, *а, б*). Из результатов, доказываемых в вузовском курсе математического анализа, следует, что существует число, к которому стремятся площади S_n правильных n-угольников, вписанных в окружность, при неограниченном возрастании числа их сторон. Это число называется площадью круга. Таким образом, *за площадь круга принимается число, к которому стремятся площади вписанных в окружность, ограничивающую этот круг, правильных n-угольников при неограниченном увеличении числа их сторон.*



а) *б)* *в)*

Рис. 100

Теперь докажем следующую теорему.

Теорема (*о площади круга*). Площадь S круга радиуса R вычисляется по формуле $S = \pi R^2$.

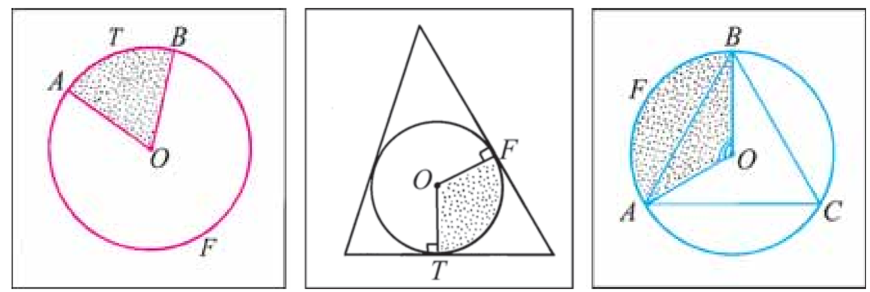
1) Пусть дан круг радиуса R и $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ — правильный *n-угольник, вписанный в окружность, которая ограничивает* этот круг. На рисунке 100, *в* дано изображение для случая $n = 6$. Если P_n — периметр вписанного многоугольника, а r_n — радиус вписанной в него окружности, то S_n — площадь этого многоугольника находится по формуле $S_n = nS_{A_1OA_2} = \frac{1}{2}P_n \cdot r_n$.

2) При неограниченном увеличении числа n сторон *n-угольника* радиус r_n вписанной окружности стремится к R. Действительно, так как $r_n = R\cos\frac{180°}{n}$, то при неограниченном увеличении числа сторон n число $\frac{180°}{n}$ стремится к нулю, а значит, $\cos\frac{180°}{n}$ стремится к единице, т. е. r_n стремится к R. Кроме того, периметр P_n стремится к длине окружности, равной $2\pi R$, а площадь S_n стремится к площади S круга. Таким образом, площадь круга $S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Теорема доказана.

2. Площадь сектора. Рассмотрим вопрос о вычислении площади части круга, которая называется сектором.

Определение. Сектором называется часть круга, ограниченная дугой окружности и двумя радиусами, соединяющими концы дуги с центром круга.

Дуга окружности, ограничивающая сектор, называется *дугой сектора*. Например, на рисунке 101, *а* изображены два сектора, дугами которых служат дуги ATB и AFB. На рисунке 101, *б* изображены круг, который касается всех сторон треугольника, и два сектора, ограниченные радиусами, проведенными в точки касания, и соответствующими дугами окружности.



а) *б)* *в)*

Рис. 101

Выведем формулу для вычисления площади S сектора радиусом R, дуга которого имеет градусную меру α. Площадь круга радиусом R равна πR^2. Следовательно, площадь сектора, ограниченного дугой в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360°}$. Значит, *площадь S сектора, ограниченного дугой в α градусов, выражается формулой* $S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha$.

Например, если ABC — равносторонний треугольник, вписанный в круг радиуса R, а точка O — его центр, тогда площадь сектора, ограниченного радиусами OA, OB и дугой AFB, равна $\frac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° = \frac{\pi R^2}{3}$ (рис. 101, *в*).

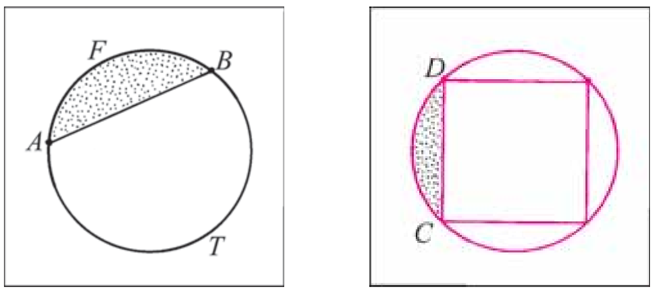
3. Площадь сегмента. Рассмотрим формулу для нахождения площади фигуры, которая называется сегментом.

Определение. **Сегментом называется часть круга, ограниченная дугой окружности и хордой, соединяющей концы дуги.**

Дуга окружности, ограничивающая сегмент, называется *дугой сегмента, а ограничивающая его хорда называется основанием сегмента*.

На рисунке 102, *а* изображены два сегмента, ограниченные хордой AB и дугами AFB и ATB. Хорда AB является основанием для каждого из этих сегментов.

На рисунке 102, *б* изображены сегменты, ограниченные стороной CD вписанного квадрата и соответствующими дугами окружности.



а) *б)*

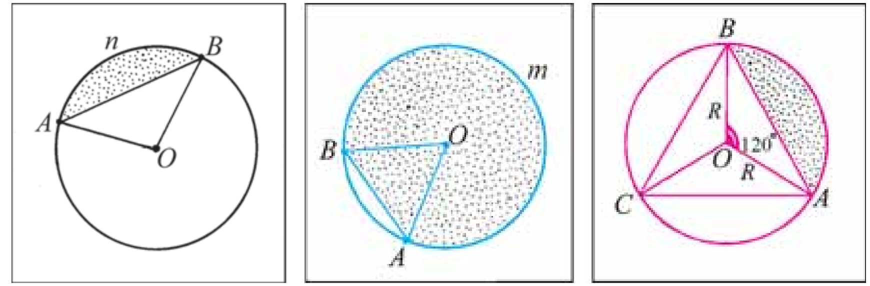
Рис. 102

Зная формулу, по которой вычисляется площадь сектора, нетрудно вывести формулу для вычисления площади сегмента. Рассмотрим два случая: 1) дуга сегмента меньше 180°; 2) дуга сегмента больше 180°.

1) Пусть дуга AnB сегмента имеет градусную меру α, меньшую 180° (рис.103, *а*). Тогда площадь этого сегмента равна разности площади сектора, ограниченного этой дугой и радиусами OA, OB, и площади треугольника AOB, т. е. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha - S_{AOB}$.

2) Пусть дуга AmB имеет градусную меру α, большую 180° (рис. 103, *б*). Тогда площадь этого сегмента равна сумме площади сектора, ограниченного этой дугой и радиусами OA, OB, и площади треугольника AOB, т. е. $S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360°} \cdot \alpha + S_{AOB}$.

Заметим, что площадь сегмента, градусная мера дуги которого α больше 180°, можно найти также как разность между площадью круга и площадью сегмента с тем же основанием и дугой, градусная мера которой равна $360° - \alpha$.



а) *б)* *в)*

Рис. 103

Пусть ABC — равносторонний треугольник, вписанный в круг радиуса R, а точка O — его центр. Тогда площадь меньшего сегмента, основанием которого служит сторона AB треугольника, равна $\frac{\pi R^2}{360°} \cdot 120° - S_{AOB} = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{1}{2}R^2\sin 120° = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{\sqrt{3}\,R^2}{4}$ (рис. 103, *в*).

Задача 1. Диагональ BD равнобедренной трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне, а площадь круга, вписанного в треугольник ABD, равна 4π см². Вычислите длину окружности, описанной около трапеции, если площадь треугольника ABD равна 24 см² (рис. 104).

Решение.

Для нахождения длины окружности, описанной около трапеции $ABCD$, необходимо найти радиус R, так как длина C окружности находится по формуле $C = 2\pi R$. По условию задачи окружность, описанная около трапеции, описана около прямоугольного треугольника ABD.

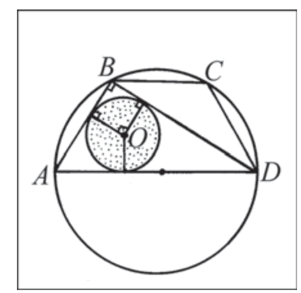


Рис. 104

Следовательно, основание AD трапеции является диаметром окружности, значит, $R = \frac{AD}{2}$.

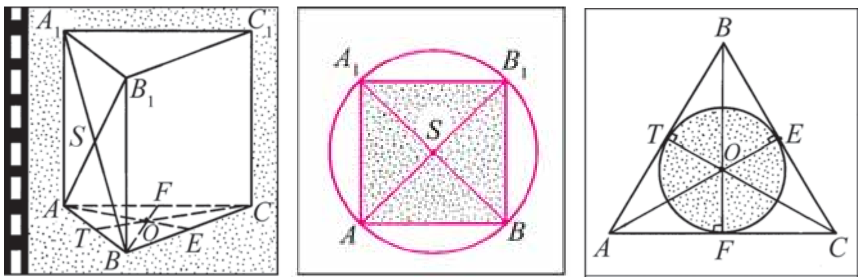
1) Пусть r — радиус круга, вписанного в треугольник ABD. Так как площадь этого круга равна 4π см², то из уравнения $\pi r^2 = 4\pi$ находим, что $r = 2$ см.

2) Площадь S_{ABD} прямоугольного треугольника ABD можем найти по формуле $S_{ABD} = rp$, где r — радиус вписанного круга, p — полупериметр треугольника ABD. По условию задачи $S_{ABD} = 24$ см², следовательно, из уравнения $24 = 2p$ находим $p = 12$ см.

3) Для нахождения длины отрезка AD воспользуемся формулой $r = p - AD$. Отсюда $AD = p - r = 12 - 2 = 10$ см.

4) Теперь находим $R = \frac{AD}{2} = 5$ см. Следовательно, $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ см. Ответ: 10π см.

Задача 2. Основаниями прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служат равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Вычислите длину окружности, описанной около боковой грани призмы, если площадь круга, вписанного в основание, равна 9π см^2, а все ребра призмы равны между собой (рис. 105, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 105

Решение.

По условию задачи каждая боковая грань призмы является квадратом. Следовательно, достаточно вычислить длину радиуса R окружности, описанной около квадрата AA_1B_1B, так как длина окружности $C = 2\pi R$. Радиус R равен половине диагонали квадрата, т. е. $R = \frac{1}{2}AB_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}AB$ (рис. 105, *б*). *Для нахождения длины стороны AB можем воспользоваться тем, что по условию задачи известна площадь круга, вписанного в равносторонний треугольник ABC.*

1) Пусть точка O — центр круга, вписанного в треугольник ABC, и $T = CO \cap AB$, тогда $AB = 2AT$.

2) В прямоугольном треугольнике ATO катет $TO = r$ и гипотенуза $AO = 2r$, где r — радиус вписанного круга. В этом треугольнике катет $AT = \sqrt{AO^2 - TO^2} = \sqrt{4r^2 - r^2} = r\sqrt{3}$ (рис. 105, *в*).

3) Так как площадь круга, вписанного в треугольник ABC, равна 9π см^2, то из уравнения $\pi r^2 = 9\pi$ находим, что $r = 3$ см. Следовательно, $AT = r\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ см и $AB = 6\sqrt{3}$ см и $R = 3\sqrt{6}$ см.

4) Теперь вычисляем длину C окружности, описанной около грани AA_1B_1B: $C = 2\pi R = 6\pi\sqrt{6}$ см. Ответ: $6\pi\sqrt{6}$ см.

Задачи к § 3

I

1. Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат, если длина стороны квадрата равна 8 см.

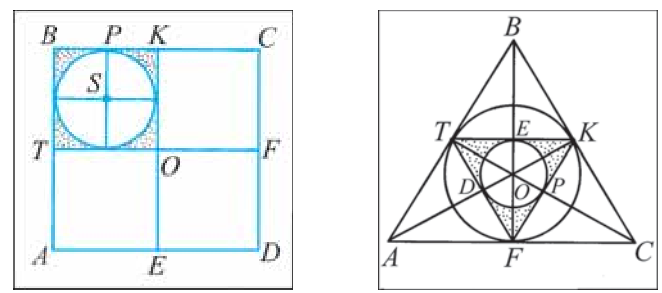
2. Площадь круга, вписанного в квадрат, равна 16π см^2. Вычислите площадь квадрата.

3. Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат, длина диагонали которого равна 4см.

4. В круг вписан квадрат. Найдите отношение площади этого круга к площади круга, вписанного в данный квадрат.

5. Площадь квадрата равна 16 см^2. Вычислите площадь части квадрата, лежащей вне вписанной в него окружности.

6. Точки T, K, F, E — соответственно середины сторон AB, BC, CD и AD квадрата $ABCD$, $O = KE \cap TF$ (рис. 106, *а*). Вычислите площадь круга, вписанного в квадрат $TBKO$, если площадь круга, вписанного в квадрат $ABCD$, равна 4π см^2.



а) *б)*

Рис. 106

7. В равностороннем треугольнике ABC точки T, K и F — середины сторон AB, BC и AC соответственно (рис. 106, *б*). Вычислите площадь круга, вписанного в треугольник TKF, если длина окружности, вписанной в треугольник ABC, равна 18π см.

8. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равностороннего треугольника, длина стороны которого равна $6\sqrt{3}$ см.

9. Вычислите площадь равностороннего треугольника, если площадь круга, вписанного в этот треугольник, равна π см^2.

10. Найдите отношение площади круга, вписанного в равносторонний треугольник, к площади круга, описанного около этого треугольника.

11. Площадь равностороннего треугольника равна $\sqrt{3}$ см^2. Вычислите площадь части треугольника, лежащей вне вписанной в него окружности.

12. На высоте равностороннего треугольника, длина стороны которого равна $8\sqrt{3}$ см, как на диаметре построен круг. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой окружности, которая лежит внутри треугольника.

13. Длина окружности, описанной около равностороннего треугольника, равна 16π см. Вычислите длину вписанной в этот треугольник окружности.

14. В равносторонний треугольник, длина стороны которого равна 6 см, вписан круг. Вычислите площадь сектора, ограниченного меньшей дугой, концами которой служат точки касания круга со сторонами треугольника.

15. В ромбе $ABCD$ диагональ BD равна его стороне. Вычислите площадь круга, вписанного в треугольник BCD, если периметр ромба равен 24 см.

16. Острый угол ромба равен $60°$. Вычислите площадь круга, вписанного в этот ромб, если длина его меньшей диагонали равна 6 см.

17. Один из углов ромба равен $120°$. Вычислите площадь ромба, если площадь круга, вписанного в него, равна 3π см^2.

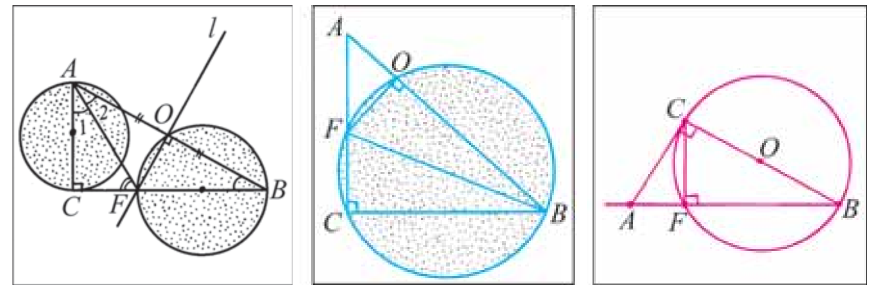
18. Точки T, F, K и P — середины сторон AB, BC, CD и DA ромба $ABCD$ соответственно. Вычислите площадь круга, описанного около четырехугольника $TFKP$, если $\angle BCD = 60°$ и площадь ромба равна $2\sqrt{3}$ см^2.

19. Площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольного треугольника, равна 100π см^2, а длина одного из катетов треугольника — 8 см. Вычислите площадь этого треугольника.

20. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 6 см, а его площадь — 24 см^2. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого прямоугольного треугольника.

21. Точка O — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC, в котором угол B равен $30°$. Серединный перпендикуляр l к

гипотенузе пересекает катет BC в точке F. Вычислите площадь круга, диаметром которого служит катет AC, если площадь круга, который ограничен описанной около треугольника BOF окружностью, равна π см^2 (рис. 107, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 107

22. Точка F — середина катета AC прямоугольного треугольника ABC, FO — перпендикуляр, проведенный из точки F к гипотенузе AB, $AC = 4$ см (рис. 107, *б*). Вычислите площадь треугольника ABC, если площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около четырехугольника $CFOB$, равна 13π см^2.

23. Окружность, диаметром которой является катет BC прямоугольного треугольника ACB, пересекает гипотенузу AB в точке F. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около треугольника AFC, если $AF = 4$ см, $BF = 9$ см (рис. 107, *в*).

24. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника, если периметр прямоугольника равен 34 см, а длина одной из сторон на 7 см больше длины другой стороны.

25. Периметр прямоугольника равен 20 см, а его площадь 24 см^2. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого прямоугольника.

26. Площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника $ABCD$, равна $\frac{169}{4}\pi$ см^2, а расстояние от вершины B до прямой, содержащей диагональ AC, равно 6 см. Вычислите площадь прямоугольника.

27. На стороне AD прямоугольника $ABCD$ как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагональ BD в точке K так, что $DK : KB = 1 : 3$. Длина перпендикуляра, опущенного из вершины A на диагональ BD, равна 6 см. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольника.

28. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного треугольника, длина основания которого равна 8 см, а угол при его основании равен 15°.

29. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 30°, а высота, проведенная к основанию, равна 4 см. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого треугольника.

30. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренного треугольника, если длина основания треугольника равна 8 см, а высота, проведенная к этому основанию, — 3 см.

31. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α, а высота, проведенная к основанию, — m. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около этого треугольника.

32. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренный треугольник, если его боковая сторона равна a, а угол при его вершине — α.

33. Вычислите радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, в котором длины гипотенузы и катета равны 13 см и 5 см соответственно.

34. Вычислите площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если его острый угол равен 30°, а длина катета, лежащего против этого угла, равна 2 см.

35. Точка касания вписанного круга делит гипотенузу прямоугольного треугольника на отрезки, длины которых равны 4 см и 6 см. Вычислите площадь круга, вписанного в этот треугольник.

36. Длина окружности, ограничивающей круг, равна 6π см. Вписанный угол окружности равен 20°. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой, на которую опирается вписанный угол.

37. Площадь круга равна 5π см^2, а угол, вписанный в окружность, ограничивающую этот круг, равен 36°. Вычислите площадь сектора, ограниченного дугой, на которую опирается вписанный угол.

38. Длина боковой стороны равнобедренной трапеции равна 8 см, а угол при меньшем основании — 120°. Вычислите площадь круга, вписанного в эту трапецию.

39. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, если угол при ее основании равен α, а средняя линия равна m.

40. Площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию с углом, равным 30°, равна 4π см^2. Вычислите длину средней линии трапеции.

41. Площадь равнобедренной трапеции, в которую вписан круг, равна 18 см^2, а длина ее боковой стороны — 6 см. Вычислите площадь круга, вписанного в трапецию.

42. Найдите площадь круга, вписанного в равнобедренную трапецию, основания которой a и b.

43. Вычислите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около равнобедренной трапеции, длины оснований которой равны 2 см и 14 см, а длина боковой стороны — 10 см.

44. Площадь круга, описанного около грани правильного тетраэдра, равна 4π см^2. Вычислите площадь грани тетраэдра.

45. Основаниями прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служат равнобедренные прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Вычислите сумму площадей боковых граней призмы, если площадь круга, описанного около основания призмы, равна 16π см^2, а боковое ребро равно радиусу этого круга.

II

46. ABC — равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Точки T, F и E лежат на сторонах AB, BC и AC соответственно так, что $AT : TB = 1 : 2$, $BF : FC = 1 : 2$ и $CE : EA = 1 : 2$. Докажите, что треугольник TFE — равносторонний, и найдите площадь круга, описанного около него.

47. Точки F, T, E и P лежат на сторонах AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$ соответственно так, что $BT = CE = DP = AF = \frac{1}{3}AB$. Докажите, что четырехугольник $FTEP$ — квадрат, и найдите отношение площади круга, вписанного в него, к площади круга, вписанного в квадрат $ABCD$.

48. В прямоугольном треугольнике ABC высота CF, проведенная к гипотенузе, делит ее на отрезки, длины которых относятся как $4 : 1$. Найдите отношение площадей кругов, вписанных в треугольники AFC и BFC.

49. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, описанной около прямоугольного треугольника, в котором острый угол равен $15°$, а произведение длин катетов равно m.

50. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны 3 см и 4 см соответственно. Вычислите площадь круга, который вписан в треугольник ABC.

51. Окружность касается большего катета прямоугольного треугольника и проходит через вершину противолежащего острого угла, а ее центр лежит на гипотенузе. Вычислите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если длины катетов равны 3 см и 4 см.

52. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен φ, а высота, проведенная к боковой стороне, равна h. Найдите площадь круга, описанного около треугольника.

53. Угол при вершине C равнобедренного треугольника ABC равен $120°$, а его боковая сторона равна a. Найдите площадь круга, ограниченного окружностью, проходящей через вершины A, B и центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

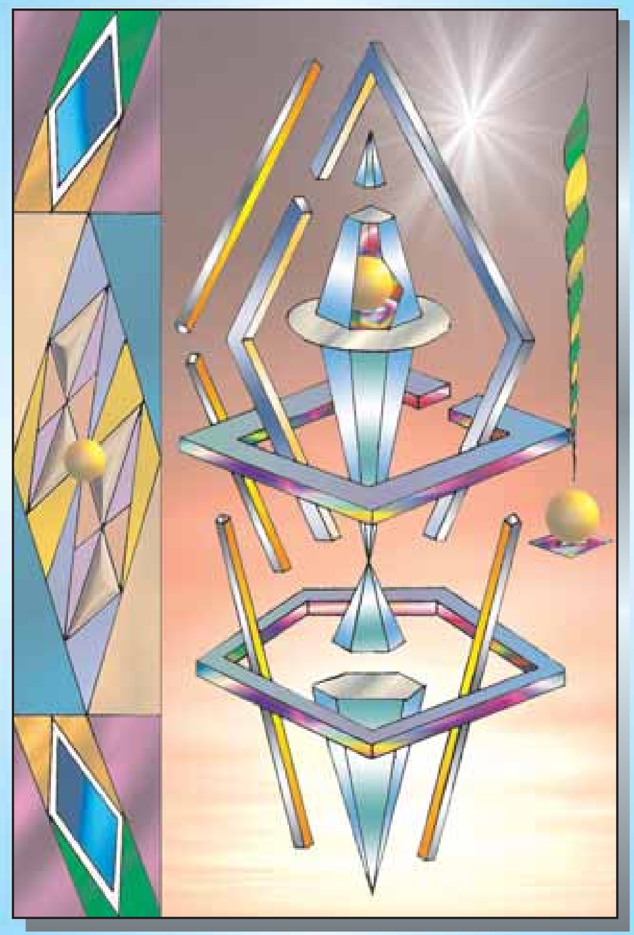
54. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. Найдите отношение площади круга, описанного около этого треугольника, к площади вписанного круга.

55. Круг вписан в трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Найдите площадь круга, если известно, что точка касания делит боковую сторону на отрезки m и n.

56. Около окружности описана прямоугольная трапеция. Найдите площадь круга, ограниченного этой окружностью, если длины оснований трапеции равны a и b.

57. В равнобедренную трапецию, длина меньшего основания которой равна 1 см, вписан круг площадью π см^2. Вычислите площадь трапеции.

Координатный метод

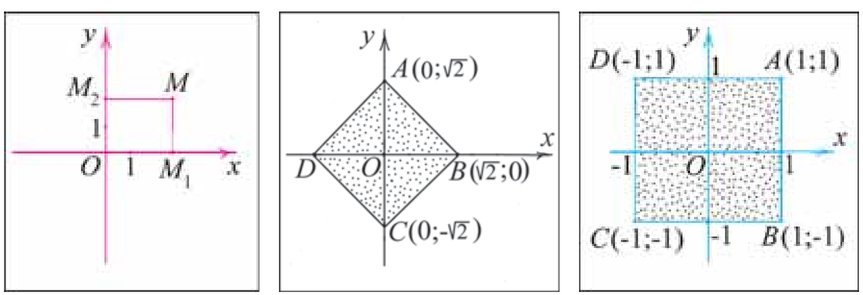


§ 4. Координатный метод

1. Координаты точки. Говорят, что на плоскости задана прямоугольная система координат, если через некоторую точку O плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, на каждой из которых выбрано направление (которое на рисунке отмечается стрелкой) и одна и та же единица измерения отрезков. Точка O называется *началом координат,* а прямые с выбранными на них направлениями — *осями координат*. Одна из осей координат называется *осью абсцисс*, а другая — *осью ординат*. Ось абсцисс обозначается Ox, а ось ординат — Oy.

Для каждой из осей определены два противоположных луча с началом в точке O. Луч, направление которого совпадает с направлением координатной оси, называется *положительной полуосью,* а другой — *отрицательной полуосью*. Если на плоскости задана прямоугольная система координат, то в этой системе координат каждой точке M плоскости соответствует упорядоченная пара чисел x, y. Эта пара чисел называется координатами точки M. Первая координата называется *абсциссой*, вторая — *ординатой*.

Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения осей координат Ox и Oy с прямыми, проходящими перпендикулярно им через точку M соответственно. Тогда координаты x, y точки M определяются следующим образом: $x = OM_1$, если точка M_1 принадлежит положительной полуоси; $x = 0$, если M_1 совпадает с точкой O; $x = -OM_1$, если точка M_1 принадлежит отрицательной полуоси; $y = OM_2$, если M_2 принадлежит положительной полуоси; $y = 0$, если M_2 совпадает с точкой O; $y = -OM_2$, если точка M_2 принадлежит отрицательной полуоси (рис. 108, *а*).



а) *б)* *в)*

Рис. 108

Координаты точки M записываются в скобках после обозначения точки: $M(x;\ y)$ (на первом месте записывается абсцисса, на втором записывается ордината).

Если точка M лежит на оси Ox, то она имеет координаты $(x;\ 0)$, если M лежит на оси Oy, то ее координаты — $(0;\ y)$.

Рассмотрим примеры. Пусть $ABCD$ — квадрат, длина стороны которого равна двум единицам длины, а прямоугольная система координат выбрана так, как показано на рисунке 108, *б*. Тогда в выбранной системе вершины квадрата имеют координаты: $A(0;\ \sqrt{2})$; $B(\sqrt{2};\ 0)$; $C(0;\ -\sqrt{2})$; $D(-\sqrt{2};\ 0)$.

Если система координат выбрана так, как показано на рисунке 108, *в*, то координаты вершин данного квадрата в этой системе имеют координаты: $A(1;\ 1)$; $B(1;\ -1)$; $C(-1;\ -1)$; $D(-1;\ 1)$.

2. Расстояние между точками. Рассмотрим вопрос о нахождении расстояния между точками, если известны их координаты. Пусть на плоскости выбрана прямоугольная система координат и известны координаты точек A и B в этой системе координат: $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Тогда расстояние $d(A,\ B) = AB$ между точками A и B можно найти по формуле $d(A,\ B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Докажем данную формулу для случая, когда $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, т. е. когда отрезок AB не параллелен ни одной из координатных осей. Пусть C — точка пересечения прямых l_1 и l_2, которые проходят через точки A, B соответственно и параллельны осям Oy, Ox (рис. 109, *а*). Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Длины сторон AC и BC равны: $AC = |x_2 - x_1|$, $BC = |y_2 - y_1|$. Тогда по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ или $d(A,\ B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Заметим, что данная формула верна и для случаев:

а) $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ (отрезок параллелен оси Oy, рисунок 109, *б*);

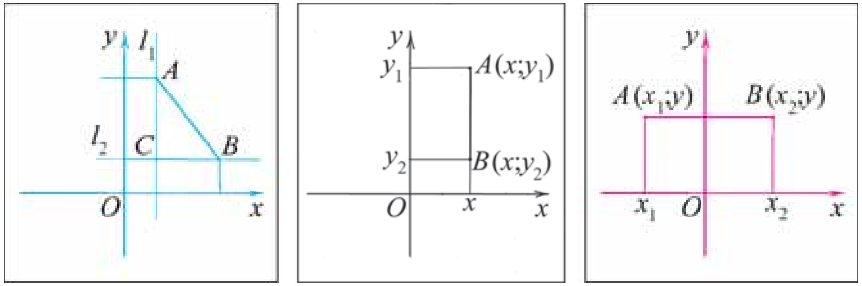
б) $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ (отрезок параллелен оси Ox, рисунок 109, *в*);

в) $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ (точки A и B совпадают).

В случае а) $d(A,\ B) = AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$.

В случае б) $d(A,\ B) = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$.

Если точки A и B совпадают, то $d(A,\ B) = 0$.



а) б) в)

Рис. 109

Рассмотрим пример. Пусть необходимо вычислить площадь квадрата $ABCD$, две вершины которого имеют координаты $A\,(8;\,8)$ и $B\,(5;\,5)$. Площадь квадрата равна квадрату длины стороны. Следовательно, $S_{ABCD} = AB^2$. Для вычисления длины стороны AB воспользуемся формулой расстояния между двумя точками $AB = \sqrt{(8-5)^2+(8-5)^2} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$.

Таким образом, площадь квадрата $S_{ABCD} = AB^2 = 18$ кв. ед.

О т в е т: 18 кв. ед.

3. Уравнение окружности. Рассмотрим вопрос об уравнении окружности.

Уравнение с двумя переменными называется *уравнением фигуры*, если ему удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих данной фигуре.

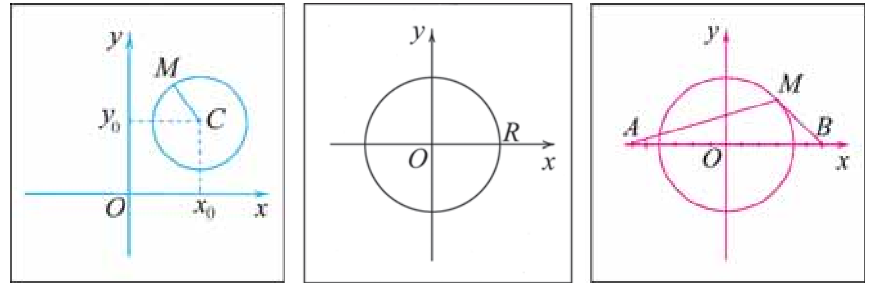
Составим уравнение окружности с центром в точке $O\,(x_0;\,y_0)$ и радиусом R.

Пусть точка $M\,(x;\,y)$ принадлежит окружности. Тогда в силу определения окружности $CM = R$. Следовательно, квадрат расстояния между точками C и M равен квадрату радиуса: $(x-x_0)^2 + (y-y_0) = R^2$ (рис. 110, *а*).

Пусть точка $M_1\,(x_1;\;y_1)$ не принадлежит окружности, тогда $CM_1 \neq R$, а значит, $(x-x_1)^2 + (y-y_1) \neq R^2$, т. е. если точка не принадлежит окружности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению $(x-x_0)^2 + (y-y_0) = R^2$. Таким образом, уравнение

$(x-x_0)^2 + (y-y_0) = R^2$ есть уравнение окружности с центром в точке $C\,(x_0;\,y_0)$ и радиусом R.

Заметим, что если центр окружности совпадает с началом системы координат, то уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$ (рис. 110, б).



а) б) в)

Рис. 110

Задача 1. Составьте уравнение фигуры на плоскости, состоящей из всех точек, сумма квадратов расстояний которых от точек $A\,(-6;\,0)$ и $B\,(6;\,0)$ равна 104.

Р е ш е н и е.

1) Пусть $M\,(x;\,y)$ — точка, принадлежащая фигуре, уравнение которой необходимо составить. Тогда по условию задачи $AM^2 + BM^2 = 104$ (рис. 110, *в*).

2) Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, координаты которых известны. Получаем:

$AM = \sqrt{(x+6)^2+y^2}$ и $BM = \sqrt{(x-6)^2+y^2}$.

3) По условию задачи $(x+6)^2 + y^2 + (x-6)^2 + y^2 = 104$. После упрощения получаем $x^2 + y^2 = 16$.

Если точка $M\,(x;\,y)$ не принадлежит фигуре, о которой идет речь в задаче, то $AM^2 + BM^2 \neq 104$, а значит, координаты точки $M\,(x;\,y)$ не удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 16$. Таким образом, уравнение фигуры имеет вид $x^2 + y^2 = 16$ и фигура является окружностью с центром в начале координат и радиусом 4.

4. Координаты середины отрезка. Рассмотрим вопрос о вычислении координат середины отрезка, если известны координаты концов этого отрезка.

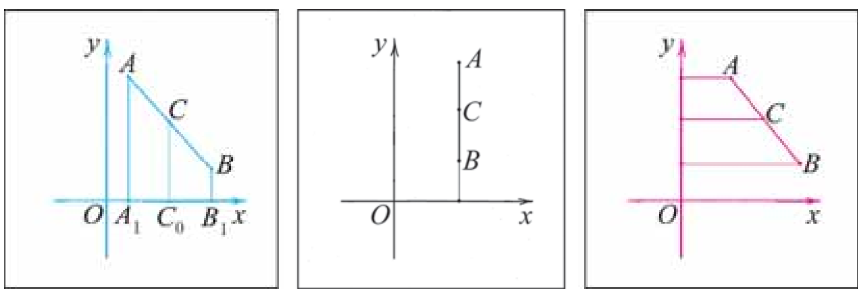
Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — произвольные точки плоскости, а точка $C(x_0; y_0)$ — середина отрезка AB. Найдем координаты x_0 и y_0.

Найдем координату x_0.

1) Пусть отрезок AB не параллелен оси Oy, т. е. $x_1 \neq x_2$ (рис. 111, *а*). Проведем через точки A, B и C прямые, параллельные оси Oy, которые пересекают ось Ox в точках $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$ и $C_0(x_0; 0)$ соответственно. Тогда по теореме Фалеса точка $C_0(x_0; 0)$ — середина отрезка A_1B_1, т. е. $A_1C_0 = C_0B_1$ или $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Отсюда следует, что либо $x_0 - x_1 = x_0 - x_2$, либо $x_0 - x_1 = -(x_0 - x_2)$. Так как $x_1 \neq x_2$, то первое равенство невозможно, а значит, верно второе равенство, из которого получаем, что $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (1).

2) Пусть отрезок AB параллелен оси Oy, т. е. $x_1 = x_2$. В этом случае все точки A_1, B_1, C_1 имеют одну и ту же абсциссу, а следовательно, формула (1) верна и в этом случае (рис. 111, *б*).

Координата y_0 точки C_0 находится аналогично. В этом случае рассматриваются прямые, параллельные оси Ox (рис. 111, *в*), а соответствующая формула имеет вид $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ (2).



а) *б)* *в)*

Рис. 111

Задача 2. Концами отрезка служат точки $A(-8; -5)$, $B(10; 4)$. Найдите координаты точек C и D, которые делят отрезок AB на три равные части.

Р е ш е н и е.

Пусть точки C и D имеют координаты $(x_C; y_C)$ и $(x_D; y_D)$.

1) *Найдем абсциссы точек C и D.*

Так как точка C — середина отрезка AD, то выполняется равенство $x_C = \frac{x_D - 8}{2}$, так как точка D — середина отрезка CB, то $x_D = \frac{10 + x_C}{2}$. Решив систему

$$\begin{cases} 2x_C = x_D - 8, \\ 2x_D = 10 + x_C, \end{cases}$$

находим, $x_C = -2$, $x_D = 4$.

2) *Найдем ординаты точек C и D.*

Для нахождения ординат точек C и D воспользуемся равенствами $y_C = \frac{y_D - 5}{2}$, $y_D = \frac{y_C + 4}{2}$. Решив систему

$$\begin{cases} 2y_C = y_D - 5, \\ 2y_D = y_C + 4, \end{cases}$$

находим $y_C = -2$, $y_D = 1$.

О т в е т: $C(-2; -2)$, $D(4; 1)$.

5. Уравнение прямой. Выведем уравнение прямой, проходящей через две точки, координаты которых известны.

Пусть на плоскости дана прямая l и выбрана прямоугольная система координат. Рассмотрим две различные точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ такие, что прямая l является серединным перпендикуляром для отрезка AB.

1) Если точка $M(x; y)$ лежит на прямой l, то $AM = BM$. Следовательно, координаты точки M удовлетворяют уравнению $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$, которое после преобразования принимает вид $ax + by + c = 0$, где $a = 2(x_1 - x_2)$, $b = 2(y_1 - y_2)$, $c = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2$. Заметим, что хотя бы один из коэффициентов a, b уравнения $ax + by + c = 0$ не равен нулю, так как точки A и B различные, а значит, хотя бы одна из разностей $x_1 - x_2$, $y_1 - y_2$ не равна нулю.

Таким образом, если точка M лежит на прямой l, то ее координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$, где коэффициенты a и b одновременно не равны нулю.

2) Если точка $M(x; y)$ не лежит на прямой l, то $AM \neq BM$ и $AM^2 \neq BM^2$, а следовательно, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$.

Таким образом, уравнением прямой в прямоугольной системе координат является уравнение первой степени $ax + by + c = 0$, где a и b одновременно не равны нулю.

Задача 3. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C. Найдите множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

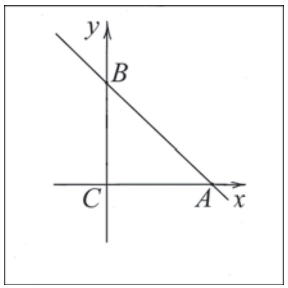


Рис. 112

Решение.

Рассмотрим систему координат, начало которой совпадает с вершиной C, а вершины A и B расположены на осях Ox и Oy, как показано на рисунке 112. Если катет данного треугольника равен a, тогда $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; a)$ — координаты точек C, A и B в выбранной системе координат соответственно. Пусть $(x; y)$ — координаты точки M, принадлежащей искомому множеству точек.

Воспользуемся формулой для нахождения расстояния между точками, если известны их координаты:

$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $BM = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}$,

$CM = \sqrt{x^2 + y^2}$. По условию задачи

$AM^2 + BM^2 = 2CM^2$, следовательно,

$(x - a)^2 + y^2 + x^2 + (y - a)^2 = 2\,(x^2 + y^2)$.

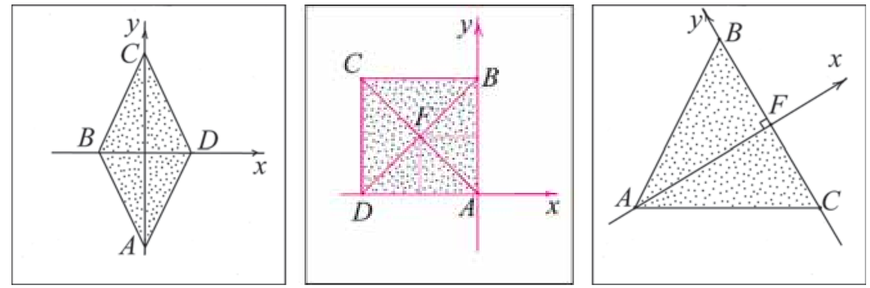
Отсюда получаем уравнение $x + y - a = 0$.

Если точка $M\,(x; y)$ не принадлежит искомому множеству точек, то $AM^2 + BM^2 \neq 2CM^2$, а значит, координаты точки M не удовлетворяют уравнению $x + y - a = 0$. Таким образом, $x + y - a = 0$ есть уравнение искомого множества точек и это множество есть прямая, на которой лежит гипотенуза AB данного треугольника.

Суть координатного метода заключается в том, что введение системы координат позволяет записать условие задачи в координатах и решать ее, используя знания по алгебре.

Задачи к § 4

1. Диагонали AC и BD ромба $ABCD$ равны a и b соответственно. Какие координаты имеют вершины ромба, если начало системы координат совпадает с точкой пересечения диагоналей, а его вершины расположены, как показано на рисунке 113, *а*?



а) *б)* *в)*

Рис. 113

2. Сторона квадрата $ABCD$ равна a. Какие координаты имеют вершины квадрата и точка F пересечения его диагоналей в прямоугольной системе координат, начало которой совпадает с вершиной A, а вершины B, C и D расположены так, как показано на рисунке 113, *б*?

3. ABC — равносторонний треугольник, сторона которого равна a. Какие координаты имеют вершины треугольника и середины его сторон, если начало прямоугольной системы координат совпадает с серединой F стороны BC, а вершины треугольника расположены, как показано на рисунке 113, *в*?

4. Вычислите расстояние между точками: а) $A\,(5; -7)$, $B\,(2; -3)$; б) $C\,(-1; 4)$, $D\,(3; 5)$; в) $F\,(-3; 0)$, $O\,(2; 4)$.

5. Вычислите периметр треугольника, вершинами которого служат точки $A\,(-4; 6)$, $B\,(4; 0)$, $C\,(7; 4)$.

6. Составьте уравнение окружности с центром в точке $O\,(-2; -5)$ и радиусом 3.

7. Составьте уравнение окружности с центром в точке $T\,(-1; 4)$ и проходящей через точку $A\,(3; 5)$.

8. Составьте уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок AB, где $A\,(-2; 3)$ и $B\,(2; 5)$.

9. На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точек $A\,(3;\,4)$ и $B\,(7;\,8)$.

10. На оси Oy найдите точку, равноудаленную от точек $F\,(-8;\,10)$ и $T\,(6;\,12)$.

11. Найдите точку A, лежащую на оси Ox, если расстояние от нее до точки $B\,(-5;\,6)$ равно 10.

12. Составьте уравнение окружности, если ее центр лежит на оси Ox и она проходит через точки $A\,(8;\,5)$ и $B\,(-1;\,-4)$.

13. Составьте уравнение окружности, если ее центр лежит на оси Oy и она проходит через точки $F\,(5;\,-1)$ и $T\,(3;\,7)$.

14. Найдите координаты точки C, которая является серединой отрезка, соединяющего точки $A\,(-2;\,-7)$ и $B\,(6;\,-3)$.

15. Точка $A\,(-3;\,-2)$ служит концом отрезка, середина которого — точка $C\,(-2;\,3)$. Найдите координаты второго конца отрезка.

16. Серединами сторон треугольника ABC служат точки $F\,(1;\,3)$, $T\,(-1;\,-2)$ и $O\,(4;\,-1)$. Найдите координаты вершин треугольника.

17. Точки $A\,(3;\,2)$, $B\,(-2;\,1)$ и $C\,(1;\,-4)$ — вершины параллелограмма, причем A и C — противолежащие вершины. Найдите координаты вершины D.

18. Смежными вершинами параллелограмма служат точки $A\,(-3;\,1)$ и $B\,(1;\,3)$. Найдите координаты двух других вершин, если диагонали параллелограмма пересекаются в точке $O\,(1;\,-2)$.

19. Вычислите длину медианы AF треугольника ABC, если $A\,(-4;\,2)$, $B\,(0;\,-2)$, $C\,(2;\,6)$.

20. В треугольнике ABC координаты вершин $A\,(-1;\,3)$, $B\,(3;\,7)$, $C\,(5;\,2)$. Вычислите длину медианы CF.

21. Вершины прямоугольника $ABCD$ имеют координаты $A\,(-5;\,1)$, $B\,(-2;\,5)$, $C\,(6;\,-1)$. Найдите координаты вершины D и площадь прямоугольника.

22. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты $A\,(-2;\,2)$, $B\,(2;\,5)$, $C\,(5;\,1)$, $D\,(1;\,-2)$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является квадратом.

23. Составьте уравнение окружности, проходящей через точки $A\,(3;\,1)$, $B\,(-2;\,6)$ и $C\,(-5;\,-3)$.

24. Составьте уравнение множества точек плоскости, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек $A\,(0;\,-2)$ и $B\,(0;\,2)$ есть величина постоянная, равная 33.

25. Составьте уравнение множества точек плоскости, если расстояние каждой из них от точки $F\,(6;\,0)$ в три раза больше их расстояний от точки $T\,(2;\,0)$.

26. Составьте уравнение множества точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом, если $A\,(-4;\,0)$ и $B\,(4;\,0)$.

27. Даны две окружности с общим центром. Докажите, что сумма квадратов расстояний от любой точки, лежащей на одной окружности, до концов диаметра второй окружности есть величина постоянная.

28. Составьте уравнение множества точек, равноудаленных от точек $A\,(-3;\,5)$ и $B\,(1;\,-1)$. Охарактеризуйте данное множество.

29. Дан прямоугольный треугольник ACB с прямым углом при вершине C. Найдите множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

30. Докажите, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин, т. е. является центром окружности, описанной около этого треугольника.

31. Дан равносторонний треугольник ABC. Найдите множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется условие $AM^2 + BM^2 = CM^2$.

32. Пусть ABC — равносторонний треугольник. Докажите, что множество точек M плоскости, для каждой из которых выполняется равенство $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$, есть прямая, проходящая через центр треугольника ABC и параллельная стороне AB.

33. Пусть $ABCD$ — прямоугольник. Докажите, что для произвольной точки M плоскости верно следующее равенство:

$$AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2.$$

Вопросы к третьей главе

1. Верно ли, что многоугольник, у которого все стороны равны, является правильным? Приведите пример выпуклого многоугольника, стороны которого равны, но который не является правильным.

2. Верно ли, что два взаимно перпендикулярных диаметра окружности являются диагоналями правильного четырехугольника, вписанного в эту окружность?

3. Всегда ли около правильного многоугольника можно описать окружность?

4. Чему равен радиус окружности, описанной около правильного шестиугольника?

5. Верно ли, что сторона a_n правильного n-угольника выражается через радиус R описанной окружности по формуле $a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$?

6. По какой формуле сторона правильного n-угольника выражается через радиус вписанной окружности?

[7]. Площадь квадрата, вписанного в окружность, равна S. Чему равна длина окружности?

[8]. Площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна S. Найдите площадь круга, ограниченного данной окружностью.

[9]. Найдите длину окружности, описанной около квадрата, равновеликого кругу радиуса R.

[10]. Найдите отношение длины окружности, вписанной в правильный шестиугольник, к длине окружности, описанной около него.

4

Задачи для повторения

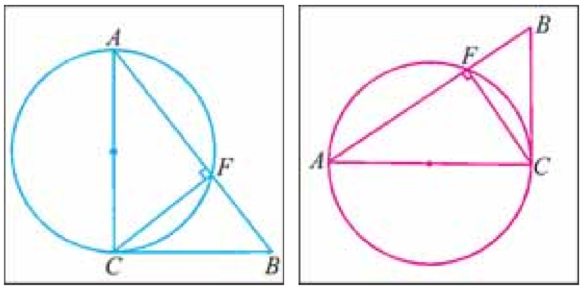
Треугольники и окружность

Глава 4
ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

§ 1. Треугольники и окружность

1. Прямоугольный треугольник и окружность

1. Длина катета BC прямоугольного треугольника ACB равна 15 см, а его катет AC служит диаметром окружности. Длина хорды, соединяющей вершину C прямого угла с точкой F пересечения окружности и гипотенузы, равна 12 см. Вычислите радиус окружности (рис. 114, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 114

Дано:
$\angle ACB = 90°$,
AC — диаметр,
$BC = 15$ см,
$CF = 12$ см.
Найти: R.

Решение.

Из условия следует, что радиус R равен половине катета AC. Заметим, что $\angle AFC = 90°$, так как опирается на диаметр AC. Таким образом, отрезок CF — высота, проведенная к гипотенузе треугольника ACB, следовательно, $CF^2 = AF \cdot FB$.

1) В треугольнике CFB катет $FB = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{225 - 144} = 9$ (см).

2) Воспользовавшись равенством $CF^2 = AF \cdot FB$, находим $AF = CF^2 : FB = \frac{144}{9}$ (см).

3) Теперь $AB = AF + FB = \frac{144}{9} + 9 = \frac{225}{9}$ (см).

4) Квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и длины проекции этого катета на гипотенузу, следовательно, $AC^2 = AF \cdot AB$ и $AC = \sqrt{AF \cdot FB} = 20$ (см).

Таким образом, $R = \frac{AC}{2} = 10$ (см).

Ответ: 10 см.

2. Окружность, построенная на стороне AB прямоугольника $ABCD$ как на диаметре, пересекает его диагональ BD в точке F. Вычислите площадь прямоугольника, если точка F делит диагональ на отрезки, длины которых равны 4 см и 9 см.

3. Длина одной из смежных сторон прямоугольника равна 15 см, а длина проекции другой стороны на диагональ прямоугольника равна 16 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в один из треугольников, на которые диагональ разбивает данный прямоугольник.

4. Основание трапеции является диаметром описанной около нее окружности. Вычислите площадь трапеции, если длины оснований трапеции равны 10 см и 26 см.

5. Длина средней линии трапеции равна 9 см, а ее площадь 54 см^2. Вычислите длины оснований трапеции, если одно из оснований является диаметром описанной около трапеции окружности.

6. В прямоугольной трапеции, высота которой h, на стороне, перпендикулярной основанию, как на диаметре построена окружность, которая касается противолежащей стороны трапеции. Найдите произведение длин оснований трапеции.

7. Длина стороны AB параллелограмма $ABCD$ равна 15 см. Сторона AD является диаметром окружности, описанной около треугольника ABD и пересекающей сторону BC в точке T. Вычислите длину хорды BT, если длина ортогональной проекции диагонали BD на сторону AD равна 16 см.

8. Основание D перпендикуляра, проведенного из точки C окружности к ее диаметру AB, делит его на отрезки длиной 4 см и 9 см. Окружность, построенная на отрезке AD как на диаметре, пересекает хорду AC в точке F. Вычислите длину отрезка AF.

9. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, а меньшая окружность пересекает диаметр AB большей окружности в точке T. Касательная, проведенная к меньшей окружности в точке T, пересекает большую окружность в точке C. Вычислите радиус меньшей окружности, если известно, что она пересекает хорду AC

в точке F так, что $CF : FA = 1 : 3$, и расстояние от точки T до прямой AC равно 3 см.

10. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, построенная на отрезке AO как на диаметре, пересекает сторону в точке F, которая делит ее в отношении $1 : 3$. Вычислите градусные меры углов ромба.

11. Окружность, проходящая через вершины тупых и одного из острых углов ромба, пересекает большую диагональ в точке K, которая делит эту диагональ на части 5 см и $\frac{7}{5}$ см. Вычислите длину стороны ромба.

12. На основании AB равнобедренного треугольника ACB как на диаметре построена окружность, которая пересекает сторону CB в точке F так, что $CF : FB = 3 : 1$. Вычислите расстояние от точки F до прямой AB, если $AB = 24$ см.

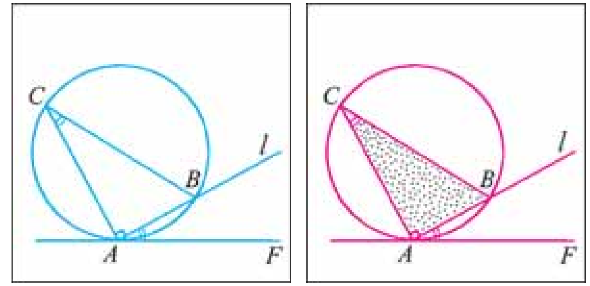
13. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 см и 7 см. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку C, пересекается с другой общей касательной в точке D. Вычислите расстояние от центра меньшей окружности до точки D.

14. Хорды CA и CB окружности имеют длины 3 см и 4 см соответственно, а диаметр CD параллелен хорде AB. Вычислите длины отрезков, на которые делится диаметр CD проведенным к нему перпендикуляром AF.

15. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Расстояния от центра окружности до концов наклонной боковой стороны равны a и b. Найдите сумму оснований трапеции.

16. Окружность, вписанная в трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC, касается боковых сторон AB и CD в точках F и T соответственно. Докажите, что $AF \cdot FB = CT \cdot TD$.

17. Прямая l пересекает окружность в точках A и B, а прямая AF касается окружности в точке A. Вычислите расстояние от точки C, диаметрально противолежащей точке B, до точки касания, если длина хорды AB равна 5 см, а угол между прямой l и касательной AF равен 30°.



а) б)

Рис. 115

Дано:
AF — касательная,
$\angle BAF = 30°$,
$AB = 5$ см.
Найти: AC.

Решение.

В силу теоремы об угле между хордой и касательной $\angle ACB = \angle BAF = 30°$. *Кроме того, так как точки C и B диаметрально противолежащие, то угол CAB опирается на диаметр, а следовательно, он равен* 90°, *т. е. треугольник CAB — прямоугольный* (рис. 115, *а*, *б*).

Расстояние от точки C до точки касания A равно катету CA треугольника CAB. Так как катет AB, лежащий против угла в 30° этого треугольника, равен 5 см, то $CB = 2AB = 10$ см. Тогда катет $CA = \sqrt{CB^2 - AB^2} = \sqrt{100-25} = 5\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $5\sqrt{3}$ см.

18. Отрезок BC — диаметр окружности, точка A расположена на окружности так, что длина отрезка BA равна 2 см, а площадь треугольника ABC равна $2\sqrt{3}$ см^2. Вычислите градусную меру угла между прямой AB и касательной к окружности в точке A.

19. Касательные l_1 и l_2 к окружности радиуса R проходят соответственно через концы A и B ее диаметра. Третья касательная к окружности пересекает касательные l_1 и l_2 соответственно в точках F и T. Докажите, что $AF \cdot BT = R^2$.

20. Около трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD описана окружность, диаметром которой является основание AD. Найдите площадь трапеции, если ее диагональ равна a, а радиус окружности равен R.

21. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен 2 см, а радиус описанной окружности равен 5 см. Вычислите длины катетов треугольника.

22. В прямоугольный треугольник с катетами 36 см и 48 см вписана окружность. Через центр окружности проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Вычислите длины средних отрезков сторон треугольника, отсекаемых проведенными прямыми.

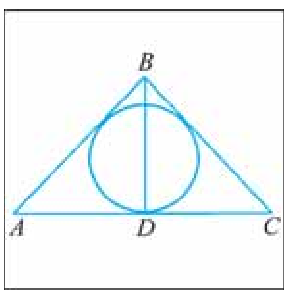
23. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина боковой стороны равна $6\sqrt{6}$ см. Окружность, диаметром которой служит сторона AB, пересекает сторону BC в точке F так, что $BF : FC = 2 : 1$. Вычислите длину основания треугольника.

24. В прямоугольный треугольник, длины катетов которого 3 см и 4 см, вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает катеты и разбивает данный треугольник на четырехугольник и треугольник. Вычислите периметр получившегося треугольника.

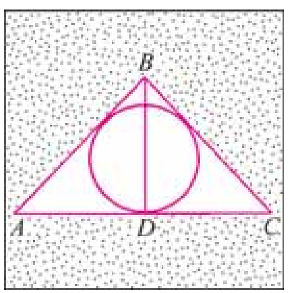
25. Из вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр CD к гипотенузе. Отрезок CD является диаметром окружности, которая на катетах AC и BC отсекает хорды a и b. Найдите площадь треугольника ABC.

2. Равнобедренный треугольник и окружность

26. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, если длина его основания равна 24 см, а высота, проведенная к основанию, равна 9 см.



а)



б)

Рис. 116

Д а н о:
$AB = BC$, $BD \perp AC$,
$D \in AC$, $AC = 24$ см,
$BD = 9$ см.
Н а й т и: r.

Р е ш е н и е.

Для вычисления радиуса r вписанной окружности воспользуемся формулой $S = rp$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. Отсюда получаем $r = \frac{S}{p}$.

1) Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9 = 108$ (см^2) (рис. 116, *а*, *б*).

2) В прямоугольном треугольнике ADB катет $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{81 + 144} = 15$ (см).

3) Теперь полупериметр $p = \frac{2AB + AC}{2} = \frac{30 + 24}{2} = 27$ (см).

4) Таким образом, находим $r = \frac{S}{p} = \frac{108}{27} = 4$ (см).

О т в е т: 4 см.

27. В равнобедренный треугольник, длина боковой стороны которого равна 18 см, а основания — 12 см, вписана окружность. К ней проведена касательная, параллельная основанию. Вычислите длину отрезка касательной, который ограничен точками пересечения с боковыми сторонами.

28. В равнобедренный треугольник вписана окружность радиуса r. Высота, проведенная к основанию, делится окружностью в отношении 1 : 2, считая от вершины. Найдите площадь треугольника.

29. Длины боковой стороны и основания равнобедренного треугольника равны соответственно 5 см и 6 см. Вычислите расстояние между точкой пересечения высот треугольника и центром вписанной окружности.

30. В окружность вписан равнобедренный треугольник, в котором длины основания и боковой стороны равны соответственно 10 см и 12 см. Через середину высоты, проведенной к основанию треугольника, проведена хорда, параллельная основанию. Вычислите длину хорды.

31. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписан в окружность. Из вершины A проведен перпендикуляр к стороне BC и продолжен до пересечения в точке E с касательной к окружности, которая проходит через вершину B. Найдите длину отрезка BE, если AE делит высоту BD на отрезки, равные m и n, если считать от вершины B.

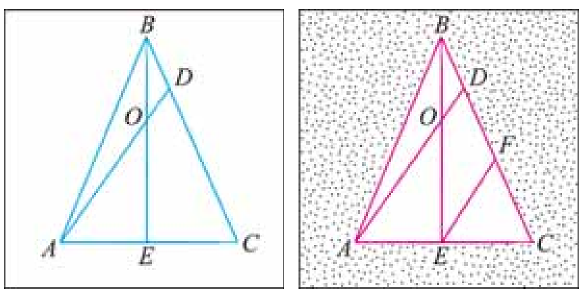
32. Длина основания равнобедренного треугольника равна $4\sqrt{2}$ см, а медианы боковой стороны — 5 см. Вычислите радиус окружности, вписанной в треугольник.

33. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность. Прямая, которая параллельна стороне AB и касается окружности, пересекает сторону AC в точке M так, что $MC = \frac{2}{5}AC$. Вычислите радиус окружности, если периметр треугольника ABC равен 20 см.

34. В равнобедренном треугольнике ABC высота, проведенная к основанию AC, равна h, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

35. Угол при основании равнобедренного треугольника равен φ. Найдите отношение радиуса вписанной в данный треугольник окружности к радиусу описанной около него окружности.

36. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на стороне BC взята точка D так, что $BD : DC = 1 : 4$. В каком отношении точка O пересечения отрезка AD и высоты BE делит высоту BE, считая от вершины B?



а) б)

Рис. 117

Д а н о: $\triangle ABC$,
$AB = BC$,
$BD : DC = 1 : 4$,
$D \in BC$, $BE \perp AC$,
$E \in AC$,
$O = BE \cap AD$.
Н а й т и:
$BO : OE$.

Р е ш е н и е.

1) Пусть $BD = x$, тогда $DC = 4x$ (рис. 117, *а, б*). Проведем отрезок EF, параллельный AD.

2) Так как высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является медианой, то точка E — середина стороны AC.

3) По признаку средней линии отрезок EF — средняя линия треугольника ADC, значит, $DF = FC = 2x$.

4) Так как $OD \parallel EF$, то $BO : OE = BD : DF = x : 2x = 1 : 2$.

О т в е т: 1 : 2.

37. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC и высотой AD выполняется условие $AD : BC = \sqrt{3}$. Точка T взята на стороне AB так, что $AT : TB = 1 : 2$. Вычислите градусную меру угла TCB.

38. Отрезок CP — высота, проведенная к основанию AB равнобедренного треугольника ABC, точка F лежит на стороне BC так, что $BF : FC = 1 : 3$, отрезки CP и AF пересекаются в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок AF, считая от вершины A?

39. Отрезок BK — высота, проведенная к стороне AD равнобедренного треугольника с основанием BD, M — точка пересечения высот AO и BK. Вычислите длину отрезка MD, если $BK = 8$ см и $AK : KD = 1 : 2$.

40. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены высота BF и медиана AM, точка O — середина высоты BF, а точка T лежит на стороне BC так, что отрезки OT и AM параллельны. Найдите отношение $BT : TC$.

41. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC высоты BF и AT пересекаются в точке S. Вычислите косинус угла ABC, если точка S является серединой отрезка OF, где точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности.

42. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC с основанием AC равен α. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины A, C и центр вписанной в данный треугольник окружности.

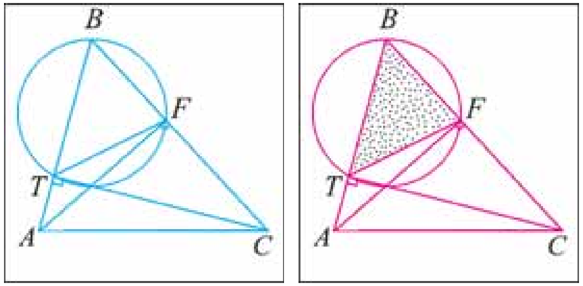
43. В равнобедренный треугольник, длина основания которого равна 6 см, вписана окружность, к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три меньших треугольника. Вычислите длину боковой стороны треугольника, если сумма периметров меньших треугольников равна 24 см.

44. Точка F лежит на основании AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AF : FC = 1 : 3$. В треугольники ABF и FBC вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей со стороной BF, если $AC = a$.

45. Высота BF треугольника ABC является биссектрисой. Вычислите длину окружности, диаметром которой служит отрезок BF, если периметр треугольника ABC равен 40 см, а периметр треугольника ABF равен 25 см.

3. Произвольный треугольник и окружность

46. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AF и CT. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BFT, если $\angle ABC = 60°$ и $AC = b$ (рис. 118, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 118

Дано: $\triangle ABC$, $\angle ABC = 60°$, $AC = b$, $AF \perp BC$, $CT \perp AB$.

Найти: R_{BFT}.

Решение.

Воспользуемся теоремой синусов и тем, что треугольник ABC подобен треугольнику FBT.

1) В треугольнике FBT по теореме синусов выполняется равенство $\frac{TF}{\sin 60°} = 2\,R_{FBT}$. Следовательно, $R_{FBT} = \frac{TF}{2\sin 60°} = \frac{TF}{\sqrt{3}}$.

2) Рассмотрим треугольники ABC и FTC. Эти треугольники подобны. Действительно, $\frac{BF}{BA} = \cos B$ и $\frac{BT}{BC} = \cos B$. Следовательно, $\frac{BF}{BA} = \frac{BT}{BC} = \cos B$, т. е. треугольники ABC и FTC подобны с коэффициентом подобия $\cos B = \cos 60° = \frac{1}{2}$.

3) Из подобия треугольников ABC и FTC следует, что $TF = b\cos B = \frac{b}{2}$. Таким образом, $R_{FBT} = \frac{TF}{\sqrt{3}} = \frac{b}{2} : \sqrt{3} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$.

Ответ: $\frac{b\sqrt{3}}{6}$.

47. В остроугольном треугольнике ABC отрезки AP и CT — высоты. Известно, что площадь треугольника ABC равна 18 см^2, а длины отрезков TP и AC равны $2\sqrt{2}$ см и $6\sqrt{2}$ см соответственно. Вычислите площадь треугольника BTP.

48. Отрезки AE и CK — высоты остроугольного треугольника ABC. Вычислите диаметр окружности, описанной около четырехугольника $AKEC$, если известно, что периметры треугольников ABC и BEK равны 15 см и 9 см соответственно, а радиус окружности, описанной около треугольника BEK, равен 1,8 см.

49. На стороне BC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и AC соответственно в точках F и T. Найдите площадь треугольника AFT, если площадь треугольника ABC равна S, а угол BAC равен 30°.

50. Отрезок AB является диаметром круга, а точка C лежит вне этого круга. Отрезки AC и BD пересекают граничную окружность в точках D и F соответственно. Вычислите градусную меру угла CBD, если площадь треугольника ABC в четыре раза больше площади треугольника CDF.

51. Окружность вписана в треугольник, периметр которого равен 20 см. Отрезок касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, расположенный между сторонами треугольника, равен 2,4 см. Вычислите длину основания треугольника.

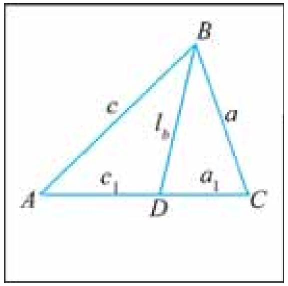
52. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AC в точке F. Докажите, что $AF = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC, $BC = a$.

53. В параллелограмме $ABCD$ длины сторон AB и BC равны соответственно 4 см и 10 см. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, касающиеся диагонали BD в точках F и T соответственно. Вычислите длину отрезка FT.

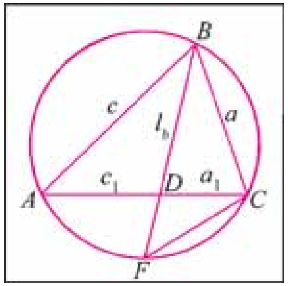
54. Периметр треугольника равен $2p$, сторона $AC = b$, $\angle ABC = \beta$ $(0 < \beta < 90°)$. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке K. Найдите площадь треугольника BOK, где точка O — центр вписанной окружности.

55. В треугольнике ABC биссектрисы BF и AT пересекаются в точке O. Вычислите длину стороны AC, если $AB = 24$ см, $AO : OT = 3 : 2$ и $AF : FC = 6 : 7$.

56. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC справедлива формула $l_b^2 = ac - a_1c_1$, где l_b — длина биссектрисы BD угла B, a и c — длины сторон BA и BC соответственно, a_1 и c_1 — длины отрезков, на которые биссектриса угла B делит сторону AC, прилежащих к стороне BC и BA соответственно (рис. 119, *а*).



а)



б)

Рис. 119

Дано: $\triangle ABC$,
$\angle ABD = \angle DBC$,
$AB = c$, $BC = a$,
$BD = l_b$, $AD = c_1$,
$DC = a_1$.
Доказать:
$l_b^2 = ac - a_1c_1$.

Решение.

Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Пусть F — точка пересечения прямой BD и этой окружности и $DF = x$ (рис. 119, *б*).

1) По свойству отрезков пересекающихся хорд выполняется равенство $l_b \cdot x = a_1 \cdot c_1$.

2) Треугольники ABD и FBC подобны, так как $\angle ABD = \angle FBC$ по условию и $\angle BAC = \angle BFC$, поскольку являются вписанными в окружность и опираются на одну и ту же дугу.

3) Из подобия треугольников ABD и FBC следует, что $\frac{l_b}{a} = \frac{c}{l_b + x}$. Отсюда следует, что $l_b^2 = ac - l_bx$.

4) Таким образом, $l_b^2 = ac - l_bx = ac - a_1c_1$.

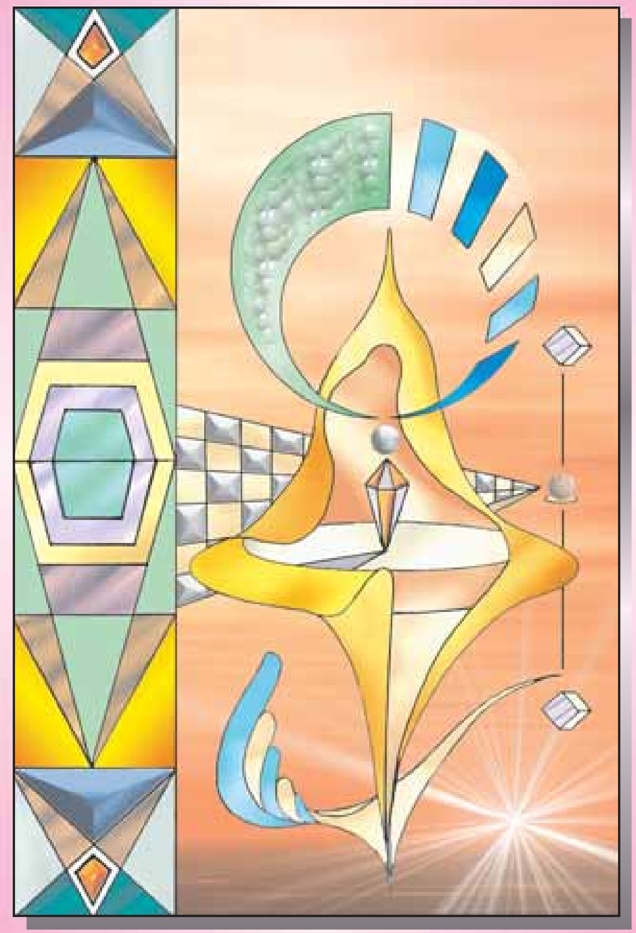
57. В треугольнике ABC длина биссектрисы BF равна $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. Вычислите длины сторон AB и AC, если $BC = 2$ см и $CF = 1$ см.

58. Биссектриса AD пересекает медиану CE в точке O. В каком отношении точка O делит биссектрису AD, считая от точки A, если $BD : DC = 2 : 1$?

59. Биссектриса AD треугольника ABC равна m. Окружность, построенная на этой биссектрисе как на диаметре, делит стороны AB и AC в отношении $2 : 1$ и $1 : 1$ соответственно, считая от вершины A. Найдите площадь треугольника ABC.

60. Окружность, центр которой лежит на стороне AC, касается сторон AB и BC треугольника ABC в точках F и T соответственно. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что точка T — середина стороны BC, отрезок BF в два раза больше отрезка FA, а радиус окружности равен R.

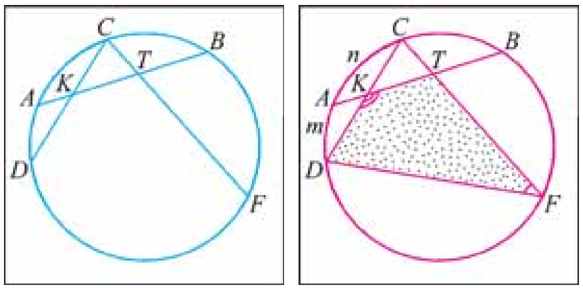
Четырехугольники и окружность



§ 2. Четырехугольники и окружность

1. Произвольный четырехугольник и окружность

1. Точка C — середина дуги AB окружности. Через точку C проведены хорды CD и CF, которые пересекают хорду AB в точках K и T соответственно. Докажите, что около четырехугольника $DKTF$ можно описать окружность (рис. 120, *а*, *б*).



а) *б)*

Рис. 120

Д а н о: $\cup AC = \cup CB$, CD и CF — хорды, $K = AB \cap CD$, $T = AB \cap CF$.

Д о к а з а т ь: существует окружность, описанная около $DKTF$.

Р е ш е н и е.

Достаточно доказать, что $\angle DKT + \angle DFT = 180°$.

1) $\angle DKT = \frac{1}{2}(\cup DFB + \cup AnC) = \frac{1}{2}(\cup DFB + \frac{1}{2}\cup ACB)$.

2) Аналогично $\angle DFT = \frac{1}{2}\cup DAC = \frac{1}{2}\ (\cup DmA + \frac{1}{2}\cup ACB)$.

3) Таким образом,

$\angle DKT + \angle DFT = \frac{1}{2}(\cup DFB + \frac{1}{2}\cup ACB) + \frac{1}{2}(\cup DmA + \frac{1}{2}\cup ACB) =$
$= \frac{1}{2}(\cup DFB + \cup DmA + \cup ACB) = 180°$.

Что и требовалось доказать.

2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D, касательные к окружностям, проведенные в точках C и D, пересекаются в точке O. Докажите, что около четырехугольника $ACOD$ можно описать окружность.

3. Диагонали вписанного в окружность четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а прямые AB и CD пересекаются в точке T. Вычислите градусные меры углов ABD и BDC, если $\angle AOD = 104°$, $\angle ATD = 28°$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, а прямые AB и CD пересекаются в точке O. Вычислите градусную меру угла AOD, если градусная мера угла BDC равна 32°.

5. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке F, а $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. Вычислите градусные меры углов BAD и BCD, если $\angle AFD = 80°$, а градусная мера дуги CD равна 60°.

6. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности, а сторона AB — диаметр окружности, прямые AD и CB пересекаются в точке F. Вычислите градусную меру угла AFB, если сторона DC равна радиусу окружности.

7. Около окружности радиуса 6 см описан четырехугольник $ABCD$. Вычислите его площадь, если $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $AD = 20$ см.

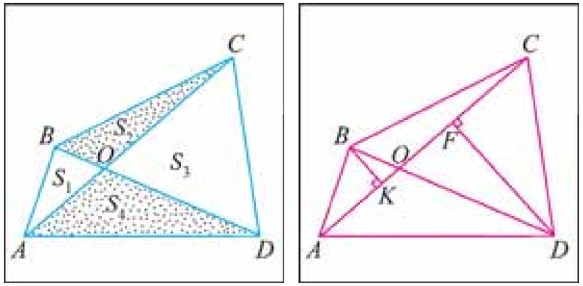
8. В окружность вписан четырехугольник с углами 120°, 90°, 60° и 90°. Вычислите радиус окружности, если площадь четырехугольника равна $27\sqrt{3}$ см^2, а его диагонали взаимно перпендикулярны.

9. В окружность радиуса 6 см вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого взаимно перпендикулярны. Точки E и F являются серединами отрезков AC и BD соответственно. Точка K пересечения диагоналей находится от центра O окружности на расстоянии 5 см. Вычислите площадь четырехугольника $ABCD$, если площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 см^2.

10. В окружность вписан четырехугольник, одна диагональ которого — диаметр окружности. Докажите, что ортогональные проекции противолежащих сторон четырехугольника на другую диагональ равны между собой.

11. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, сторона AB которого — диаметр окружности, а диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Вычислите длину отрезка AO, если $BC = 12$ см, $CO = 9$ см, $S_{ABC} = 3S_{ACD}$.

12. Диагонали AC и BD выпуклого четырехугольника $ABCD$, пересекающиеся в точке O, разбивают его на треугольники, площади которых $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{AOD} = S_4$. Докажите, что верно равенство $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ (рис. 121, *а*).



а) *б)*

Рис. 121

Дано: $ABCD$ — четырехугольник, $AC \cap BD = O$, $S_{AOB} = S_1, S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$, $S_{AOD} = S_4$.
Доказать: $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.

Решение.

1) Пусть $BK \perp AC$, $K \in AC$ и $DF \perp AC$, $F \in AC$ (рис. 121, *б*).

2) Треугольники AOB и BOC имеют общую высоту BK, следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO}{OC}$ (1).

3) Треугольники COD и AOD имеют общую высоту DF, значит, $\frac{S_4}{S_3} = \frac{AO}{OC}$ (2).

4) Из равенств (1) и (2) следует, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ или $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$. Что и требовалось доказать.

13. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $S_{BOC} = S_1$, $S_{AOD} = S_2$ и $OD = 4OB$.

14. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площади треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что в этом случае прямые BC и AD параллельны.

15. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а площади треугольников AOB и COD равны. Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

16. В треугольнике ABC через середину стороны AC проходит прямая, которая пересекает сторону BC в точке O, а продолжение стороны AB в точке F, площади треугольников BFO и DOC равны. Докажите, что отрезок BD является средней линией треугольника AFC.

17. Диагонали четырехугольника, в который вписана окружность, пересекаются в точке O. Докажите, что выполняется равенство $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$, где R_1, R_2, R_3, R_4 — радиусы окружностей, описанных около треугольников ABO, BOC, COD и AOD соответственно.

18. Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность, пересекаются в точке O. Окружность, описанная около треугольника AOB, пересекает стороны BC и AD в точках F и T соответственно. Верно ли, что $OF = a$, если $OT = a$?

19. Докажите, что середины сторон выпуклого четырехугольника являются вершинами параллелограмма, площадь которого равна половине площади данного четырехугольника.

2. Трапеция и окружность

20. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Вычислите площадь трапеции, если длина диагонали AC равна 12 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований трапеции, равна 9 см.

21. Диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Чему равно отношение площадей треугольников AOB и BOC, если $BC : AD = m : n$?

22. Диагональ BD трапеции $ABCD$ перпендикулярна боковой стороне AB. Вычислите длину основания AD, если $\angle ADB = \angle BDC = 30°$ и периметр трапеции равен 30 см.

23. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно m и n. Найдите длину диагонали BD, если известно, что окружность, описанная около треугольника BCD, касается стороны AB трапеции в точке B.

24. Радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$, равен R, а ее диагонали AC и BD делятся точкой их пересечения O в отношении 1 : 3, считая от меньшего основания BC. Найдите площадь трапеции, если боковая сторона AB видна из точки O под углом 60°.

25. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Длина большего основания трапеции равна a, а длина боковой стороны равна m. Найдите площадь трапеции.

26. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом α.

27. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S. Найдите длину средней линии трапеции, если градусная мера острого угла при ее основании равна φ.

28. В равнобедренную трапецию вписана окружность. Найдите длину диагонали трапеции, если длины ее оснований равны a и b.

29. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна S, а боковая сторона трапеции в два раза больше ее высоты. Найдите площадь круга, вписанного в трапецию.

30. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна 32 см^2, а острый угол трапеции равен 30°. Вычислите длины сторон трапеции.

31. Около окружности описана прямоугольная трапеция с острым углом α. Найдите высоту трапеции, если ее периметр равен P.

32. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а ее площадь равна S. Найдите высоту трапеции.

33. Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а длины оснований равны 16 см и 12 см. Вычислите площадь круга, ограниченного описанной около трапеции окружностью.

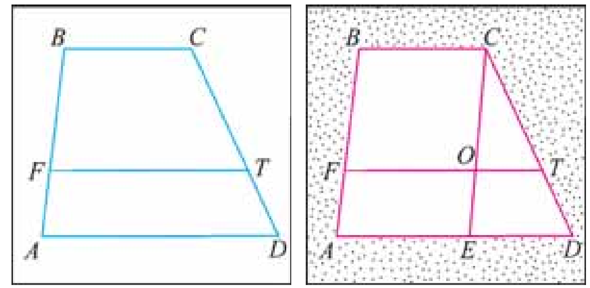
34. Вычислите площадь прямоугольной трапеции, если центр вписанной в нее окружности находится на расстоянии 1 см и 2 см от концов боковой стороны.

35. Длина диагонали равнобедренной трапеции равна 5 см, а площадь равна 12 см^2. Вычислите высоту трапеции.

36. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $8\sqrt{3}$ см^2. Вычислите длину боковой стороны трапеции, если острый угол при ее основании равен 60°.

37. Длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ равны 8 см и 10 см соответственно, а длина основания BC равна 2 см. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Вычислите площадь трапеции.

38. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ равны соответственно a и b. Через точку F, принадлежащую стороне AB и делящую ее в отношении $m : n$, считая от точки A, проведена прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекающая сторону CD в точке T. Докажите, что $FT = \dfrac{an+bm}{m+n}$ (рис. 122, $а$).



а) б)

Рис. 122

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD = a$, $BC = b$, $F \in AB$, $AF : FB = m : n$, $FT \parallel AD$, $T \in CD$.

Доказать: $FT = \dfrac{an+bm}{m+n}$.

Решение.

1) Проведем отрезок CE, параллельный стороне AB, $E \in AD$. Пусть $O = CE \cap FT$ (рис. 122, $б$).

2) Так как $AF : FB = m : n$ и $FT \parallel AD$, то $AF : FB = DT : TC = m : n$. Поскольку $CE \parallel AB$, то $OT = FT - b$.

3) Треугольник CTO подобен треугольнику CDE, следовательно, $\dfrac{OT}{ED} = \dfrac{CT}{CD}$ или $\dfrac{FT-b}{a-b} = \dfrac{n}{m+n}$. Отсюда получаем, что отрезок $FT = \dfrac{an+bm}{m+n}$.

39. Средняя линия трапеции имеет длину 10 см и делит площадь трапеции в отношении 3 : 5. Вычислите длины оснований трапеции.

40. Длина средней линии равнобедренной трапеции, в которую вписана окружность, равна 5 см. Средняя линия делит трапецию на две части, отношение площадей которых равно 7 : 13. Вычислите высоту трапеции.

41. Длины оснований трапеции равны 1 см и 7 см. Вычислите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего трапецию на равновеликие части.

42. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 6 см и 4 см соответственно. На луче BC отмечена точка F так, что прямая AF делит трапецию на две равновеликие фигуры. Вычислите длину отрезка CF.

43. Две окружности радиусов 6 см и 2 см касаются внешним образом. Вычислите расстояние от точки касания окружностей до их общей касательной.

44. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, высота которой равна m, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120°.

45. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения ее диагоналей. Вычислите длину отрезка этой прямой, расположенного между боковыми сторонами трапеции, если длины основания трапеции равны 2 см и 6 см.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

§ 1

4. 8 см. **6.** $2\sqrt{3}$ см. **7.** 7 см. **8.** 60°. **9.** 4 см. **10.** 10 см. **11.** 30 см^2. **14.** 18 см. **15.** 60°. **16.** $R\sqrt{3}$ см. **17.** $\sqrt{17}$ см. **18.** $\frac{20}{3}$ см. **19.** $2a$. **20.** $2\sqrt{13}$ см или $3\sqrt{13}$ см. **21.** $a \sin \alpha$. **22.** $\frac{a\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$. **23.** 8 см. **24.** $2R$. **25.** $\frac{ab}{2}$. **27.** $\frac{R}{3}$. **29.** $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$. **30.** 12 см. **31.** $\sqrt{R_1R_2}$.

§ 2

1. а) 60°; б) 120°. **2.** а) 45°. **3.** 40°. **4.** 15°. **5.** а) 10 см; б) $5\sqrt{3}$ см. **6.** а) $2\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см. **7.** а) 60°. **8.** а) 100°; б) 130°. **9.** 45°. **11.** 92°. **12.** $4R$. **13.** 7,5 см. **14.** 6 см. **15.** 6 см. **16.** 25 см. **17.** $2R(1 + \sqrt{3})$. **18.** а) $R\sqrt{3}$. **19.** 39 см^2. **20.** 24 см. **21.** $18\sqrt{3}$ см. **23.** 40 см. **24.** 13 см. **25.** 8 см; 3 см. **26.** 5 см. **30.** $\frac{90°-\alpha}{2}$. **31.** a. **32.** $\frac{5R}{4}$. **33.** 2 см; 1,5 см. **34.** 20 см.

§ 3

1. 4 см. **2.** 7 см. **3.** Нет. **5.** 4 см; 4 см. **6.** 18 см^2. **7.** 5 см. **8.** Да. **9.** 37°. **10.** 22°30′. **11.** 35°. **13.** 9 см. **15.** 24 см. **21.** 8 см. **22.** 4,8 см.

§ 4

1. а) Да; б) 120°; в) 6 см. **2.** 2 см. **3.** 36 см. **4.** 5 : 3. **5.** $\frac{10}{3}$ см. **6.** 12 см. **7.** 10 см. **8.** 30 см. **9.** $3 - \sqrt{3}$ см. **10.** $3\sqrt{2}$ см. **11.** 2 см. **12.** 84 см. **13.** б) Да; в) 9 см. **14.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **15.** 18 см. **16.** 5 см. **17.** 9 см. **18.** 13 см. **19.** 24 см^2. **20.** $\frac{25}{4}$ см. **21.** $\frac{a^2}{2R}$. **22.** 60 см^2. **23.** $\frac{25}{2}$ см. **24.** $7\frac{1}{24}$ см. **25.** 12 см. **31.** 48 см^2. **32.** $12(2\sqrt{3} + 3)$ см^2. **33.** 24 см. **34.** 9 см; 40 см. **35.** 25 см. **36.** 6 см; 8 см; 10 см. **37.** 13 см. **42.** 6 см. **43.** $2(2\sqrt{3} + 3)$ см. **44.** $\frac{2hr}{\sqrt{h^2-2hr}}$. **45.** 13 см. **46.** 768 см^2. **47.** 6 см. **48.** $R(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)$. **49.** 15 см.

§ 5

1. 4 см^2. **2.** 2 см. **3.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **4.** 24 см. **5.** $2(2 - \sqrt{2})$ см. **6.** 1 см. **7.** 20 см. **8.** 3 см. **9.** 4 см. **10.** 40 см. **11.** 5 см. **12.** 6 см. **13.** $\frac{2a(\sin\alpha+1)}{\sin\alpha}$. **14.** 80 см^2. **15.** $2a$. **16.** $\frac{m}{4}$. **18.** 2,4 см. **19.** 16 см. **20.** 18 см^2. **21.** 32 см^2. **22.** 150 см^2.

23. 4 см. **24.** 1 см. **25.** 110°; 20°. **27.** а) Да; б) 4 (1 + $\sqrt{3}$) см. **28.** $\sqrt{5}$ см. **29.** 8 см. **30.** $\sqrt{5}$ см. **33.** $4\sqrt{3}$ см. **34.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см. **35.** 30 см. **36.** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ см. **37.** 7,5 см. **38.** $12\sqrt{3}$ см². **41.** ab. **42.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **43.** $2\sqrt{pq}\cdot(p+q)$. **45.** $2\sqrt{5}$ см. **46.** 6 см. **47.** $\frac{8r^2\sqrt{3}}{3}$. **48.** $\frac{32a^2\sqrt{3}}{3}$. **49.** $\frac{a}{2}(3-2\sqrt{2})$. **50.** 1 см; 7 см. **51.** 168 см². **52.** 7 см; 21 см. **53.** 20 см². **54.** Да. **56.** $2\frac{2}{5}$ см.

ГЛАВА 2

§ 1

1. 6 см². **2.** 16 см². **3.** $\frac{h^2}{2\sin 2\alpha}$. **4.** $2\sqrt{3}$ см². **5.** Нет. **6.** 2 (1 + $\sqrt{3}$) см². **10.** $2\sqrt{6}$ см. **11.** 4 см. **12.** 60°. **13.** $\frac{a\sin\alpha}{\sin\beta\cdot\sin(\beta-\alpha)}$. **14.** ≈ 9,83 см; ≈ 11,95 см. **15.** ≈ 7,42 см. **16.** $3\sqrt{2}$ см. **17.** ≈ 30°30′. **18.** ≈ 6,21 см. **19.** ≈ 11,59 см. **20.** $\frac{b}{2\cos\alpha}$. **22.** $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{4}\right)}$. **23.** $\frac{m\sin\beta}{\sin\frac{3\beta}{2}}$. **24.** $2\sqrt{2}$ см. **25.** $\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **26.** 12 см. **27.** 6 см. **28.** $4\sqrt{2}$ см. **29.** 8 см. **30.** 3 см. **31.** 6,5 см. **32.** 4 см². **33.** 4 см². **34.** $\frac{m^2\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **35.** ≈ 2, 93 см². **36.** 67,5 см². **37.** 15 см. **38.** ≈ 0,28m. **39.** 16 см. **40.** 4 см. **41.** $\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$. **42.** $a^2\sin^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,(\alpha-\varphi)$. **43.** $\frac{h}{2\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}$. **44.** $\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **45.** 12,5 см. **46.** $\frac{2R^2\sin^3\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **47.** $\frac{a^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{4(2\cos\alpha+1)^2}$.

§ 2

1. $\sqrt{97}$ см. **2.** $\sqrt{37}$ см. **3.** 3 см. **4.** 2 (8 + $\sqrt{19}$) см. **5.** 120°. **6.** 7 см; 8 см. **7.** 5 см; $\sqrt{109}$ см. **8.** $2\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ см. **9.** $3(\sqrt{10}-\sqrt{3})$ см². **10.** а) Тупоугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. **12.** $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$; $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$. **13.** $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2-2d_1d_2\cos\varphi}$; $\frac{1}{2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2\cos\varphi}$. **15.** $\sqrt{35}$ см. **16.** $2\sqrt{7}$ см. **17.** $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ см. **18.** $\sqrt{7}$ см. **19.** 60°; $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ см. **20.** 120°. **21.** $\sqrt{7}$ см. **22.** $16\sqrt{3}$ см². **23.** 7 см; $\sqrt{129}$ см. **24.** $\sqrt{19}$ см; $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см². **25.** $\sqrt{201}$ см; 19 см. **26.** $BC\approx\sqrt{2}$ см; $AC\approx 1{,}93$ см; $\angle C = 60°$. **27.** $AB = 5$ см; $\angle B\approx 8°$; $\angle A\approx 37°$. **28.** $\angle C\approx 53°$; $\angle B\approx 82°$; $AC\approx 14$ см. **29.** 8 ($2\sqrt{2}$ + 3) см. **30.** 8 см. **32.** 39 см. **33.** $10\sqrt{3}$ см².

34. 11 см, 27 см. **35.** 63 см; 36 см. **36.** $\frac{4mn}{\sin\alpha}$; $\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\alpha}$; $\frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos\alpha}$. **37.** 9,5 см. **38.** 7 см; 9 см. **39.** 60°. **40.** 7 см; 24 см; 25 см. **41.** 9 см; 9 см; $6\sqrt{2}$ см.

ГЛАВА 3

§ 1

1. а) 108°; б) 144°; в) 150°. **2.** в) 10. **3.** 8 см². **4.** $12\sqrt{2}$ см. **7.** 8 см. **8.** 36 см². **9.** $48\sqrt{3}$ см². **14.** 24 см. **15.** $\frac{3R^2}{4}$. **16.** $\frac{R^2}{4}(\sqrt{3}+2)$. **17.** 800 см². **18.** $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. **19.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. **20.** 60 см². **21.** $\frac{R}{2}$. **25.** $R^2\sqrt{3}$. **26.** $2:\sqrt{3}$. **28.** $\frac{3P}{4}$. **29.** 1,5 см. **30.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ см. **31.** 3 (5$\sqrt{3}$ + 1) см. **32.** $\sqrt{3}$ см. **35.** 4 : 3. **36.** $\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})$. **37.** $\frac{4\sqrt{3}S}{9}$. **41.** $\frac{S}{2}$. **42.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. **43.** $\frac{a}{2}(3-2\sqrt{2})$. **44.** 17 см.

§ 2

1. $3\pi\sqrt{2}$ см. **2.** $32\sqrt{2}$ см. **3.** 3π см. **4.** $\pi\sqrt{S}$. **5.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см. **6.** 9 см. **7.** $2\pi\sqrt{3}$ см. **8.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ см. **9.** $2\pi\sqrt{S}$. **10.** $\pi\sqrt{5}$ см. **11.** 20 (1 + $\sqrt{3}$) см. **12.** 5π см. **13.** 13π см. **14.** $2\sqrt{73}\,\pi$ см. **15.** 120 см². **16.** 4π см. **17.** $5\sqrt{3}\,\pi$ см. **18.** $8\sqrt{3}$ см². **19.** $a\pi$. **20.** 32π см. **21.** 20π см. **22.** 0,8. **23.** 15 см. **24.** 6π см. **25.** 40π см. **26.** 5π см. **27.** 8π см. **28.** 16π см, 14π см, 6π см. **29.** $\frac{2\pi}{3}$ см; $\frac{2\pi}{3}$ см; $\frac{8\pi}{3}$ см. **30.** 8π см. **31.** 12 см. **32.** 2π см. **33.** 2π см. **34.** 2π см. **35.** 24π см. **36.** $\frac{4\pi}{3}$ см. **37.** $8\pi\sqrt{3}$ см. **38.** 8π см. **39.** 16π см. **40.** $\frac{15}{7}\pi$ см; $\frac{20}{7}\pi$ см. **41.** 12π см. **42.** $3r$. **43.** m. **44.** 12π см.

§ 3

1. 16π см². **2.** 64 см². **3.** 2π см². **4.** 2 : 1. **5.** 4 (4 − π) см². **6.** π см². **7.** $\frac{81}{4}\pi$ см². **8.** 36π см². **9.** $3\sqrt{3}$ см². **10.** 1 : 4. **11.** $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}$ см². **12.** 12π см². **13.** 8π см. **14.** π см². **15.** 3π см². **16.** $\frac{27\pi}{4}$ см². **17.** $8\sqrt{3}$ см². **18.** π см². **19.** $16\sqrt{21}$ см². **20.** 25 π см². **21.** $\frac{3\pi}{4}$ см². **22.** $8\sqrt{3}$ см². **23.** 13π см². **24.** $\frac{169}{4}\pi$ см². **25.** 13π см². **26.** 78 см². **27.** 48π см². **28.** 64π см². **29.** 64π см². **30.** $\frac{625}{36}\pi$ см². **31.** $\frac{\pi m^2}{4\sin^4\alpha}$. **32.** $\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\left(2+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}$. **33.** 2 см. **34.** $2\pi(2-\sqrt{3})$ см². **35.** 4π см². **36.** π см². **37.** π см². **38.** 12π см².

39. $\frac{\pi m^2\sin^2\alpha}{4}$. **40.** 8 см. **41.** $\frac{9\pi}{4}$ см². **42.** $\frac{\pi ab}{4}$. **43.** 50π см². **44.** $3\sqrt{3}$ см². **45.** $32(\sqrt{2}+1)$ см². **46.** $\frac{\pi a^2}{9}$. **47.** 5 : 9. **48.** 1 : 4. **49.** πm. **50.** 25π см². **51.** $\frac{225\pi}{64}$ см². **52.** $\frac{\pi h^2}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\varphi}$ см². **53.** $3\pi a^2$. **54.** $\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha\sin^2\varphi}$. **55.** πmn. **56.** $\frac{\pi a^2b^2}{(a+b)^2}$. **57.** 5 см².

ГЛАВА 4

§ 1

2. 78 см². **3.** 5 см. **4.** 216 см². **5.** 5 см, 13 см. **6.** $\frac{h^2}{4}$. **7.** 7 см. **8.** $\frac{8\sqrt{13}}{13}$ см. **9.** 3 см. **10.** 60°, 120°. **11.** 4 см. **12.** $3\sqrt{7}$ см. **13.** $3\sqrt{2}$ см. **14.** $\frac{9}{5}$ см, $\frac{16}{5}$ см. **15.** $\frac{(a+b)^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **17.** $5\sqrt{3}$ см. **18.** 30°. **20.** $\frac{a^3}{4R^2}\sqrt{4R^2-a^2}$. **21.** 6 см, 8 см. **22.** 9 см, 16 см. **23.** 12 см. **24.** 2 см. **25.** $S=\frac{(a^2+b^2)^2}{2ab}$. **26.** 4 см. **27.** 6 см. **28.** $3r^2\sqrt{3}$. **29.** $\frac{3}{4}$ см. **30.** 13 см. **31.** $\frac{m\sqrt{n(m+n)}}{n}$. **32.** $\frac{2}{7}\sqrt{14}(3-\sqrt{2})$ см. **34.** $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$. **35.** $\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin 2\varphi$. **37.** 30°. **38.** 4 : 3. **39.** 6 см. **40.** 3 : 5. **41.** $\frac{2}{3}$. **42.** $\frac{a\sqrt{2-\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. **44.** $\frac{a}{4}$. **45.** 5π см. **46.** $\frac{b\sqrt{3}}{6}$. **47.** 2 см². **48.** $\frac{24}{5}$ см. **49.** $\frac{3}{4}S$. **50.** 30°. **51.** 4 см или 6 см. **53.** 6 см. **54.** $\frac{1}{2}(p-b)^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **55.** 18 см. **57.** $AB=3$ см, $AC=2{,}5$ см. **58.** 3 : 1. **59.** $\frac{7m^2\sqrt{35}}{48}$. **60.** $\frac{7R^2\sqrt{35}}{20}$.

§ 2

3. 38°, 66°. **4.** 26°. **5.** 70°, 110°. **7.** 180 см². **8.** $3\sqrt{3}$ см. **9.** $12\sqrt{15}$ см². **11.** $\frac{25}{3}$ см. **13.** $5S_1+\frac{5}{4}S_2$. **18.** Да. **20.** $36\sqrt{5}$ см². **22.** 12 см. **23.** $\sqrt{mn}$. **24.** $\frac{4\sqrt{3}R^2}{7}$. **25.** $m\sqrt{2am-a^2}$. **26.** $h^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **27.** $\sqrt{\frac{S}{\sin\varphi}}$. **28.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+6ab+b^2}$. **29.** $\frac{S\pi}{8}$. **31.** $\frac{P\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}$. **32.** $\sqrt{S}$. **33.** 100π см². **34.** 3,6 см². **35.** 3 см или 4 см. **36.** 4 см. **37.** 40 см². **38.** $\frac{an+bm}{m+n}$. **39.** 5 см, 15 см. **40.** 4 см. **41.** 5 см. **42.** 1,2 см. **43.** 3 см. **44.** $\frac{m\sqrt{3}}{3}$. **45.** 3 см.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Значения тригонометрических функций

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	—

Значения тригонометрических функций для углов, меньших 45°, находят, пользуясь верхними наименованиями столбцов; значения тригонометрических функций для углов, больших 45°, находят, пользуясь нижними наименованиями столбцов.

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
0	0,00000	1,00000	0,00000	—	90
1	0,01745	0,99985	0,01746	57,28996	89
2	0,03490	0,99939	0,03492	28,63625	88
3	0,05234	0,99863	0,05241	19,08114	87
4	0,06976	0,99756	0,06993	14,30067	86
5	0,08716	0,99619	0,08749	11,43005	85
6	0,10453	0,99452	0,10510	9,51436	84
7	0,12187	0,99255	0,12278	8,14435	83
8	0,13917	0,99027	0,14054	7,11537	82
9	0,15643	0,98769	0,15838	6,31375	81
10	0,17365	0,98481	0,17633	5,67128	80
11	0,19081	0,98163	0,19438	5,14455	79
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Продолжение

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
12	0,20791	0,97815	0,21256	4,70463	78
13	0,22495	0,97437	0,23087	4,33148	77
14	0,24192	0,97030	0,24933	4,01078	76
15	0,25882	0,96593	0,26795	3,73205	75
16	0,27564	0,96126	0,28675	3,48741	74
17	0,29237	0,95630	0,30573	3,27085	73
18	0,30902	0,95106	0,32492	3,07768	72
19	0,32557	0,94552	0,34433	2,90421	71
20	0,34202	0,93969	0,36397	2,74748	70
21	0,35837	0,93358	0,38386	2,60509	69
22	0,37461	0,92718	0,40403	2,47509	68
23	0,39073	0,92050	0,42447	2,35585	67
24	0,40674	0,91355	0,44523	2,24604	66
25	0,42262	0,90631	0,46631	2,14451	65
26	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	64
27	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	63
28	0,46947	0,88295	0,53171	1,88073	62
29	0,48481	0,87462	0,55471	1,80405	61
30	0,50000	0,86603	0,57735	1,73205	60
31	0,51504	0,85717	0,60086	1,66428	59
32	0,52992	0,84805	0,62487	1,60033	58
33	0,54464	0,83867	0,64941	1,53987	57
34	0,55919	0,82904	0,67451	1,48256	56
35	0,57358	0,81915	0,70021	1,42815	55
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Продолжение

Градусы	sin	cos	tg	ctg	Градусы
36	0,58779	0,80902	0,72654	1,37638	54
37	0,60182	0,79864	0,75355	1,32704	53
38	0,61566	0,78801	0,78139	1,27994	52
39	0,62932	0,77715	0,80978	1,23490	51
40	0,64279	0,76604	0,83910	1,19175	50
41	0,65606	0,75471	0,86929	1,15037	49
42	0,66913	0,74314	0,90040	1,11061	48
43	0,68200	0,73135	0,93252	1,07237	47
44	0,69466	0,71134	0,96569	1,03553	46
45	0,70711	0,70711	1,00000	1,00000	45
Градусы	cos	sin	ctg	tg	Градусы

Таблица значений квадратных корней

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
1	1,000	3,162	12	3,464	10,954	23	4,796	15,166
2	1,414	4,472	13	3,606	11,402	24	4,899	15,492
3	1,732	5,477	14	3,742	11,832	25	5,000	15,811
4	2,000	6,325	15	3,873	12,247	26	5,099	16,125
5	2,236	7,071	16	4,000	12,649	27	5,196	16,432
6	2,449	7,746	17	4,123	13,038	28	5,292	16,733
7	2,646	8,367	18	4,243	13,416	29	5,385	17,029
8	2,828	8,944	19	4,359	13,784	30	5,477	17,321
9	3,000	9,487	20	4,472	14,142	31	5,568	17,607
10	3,162	10,000	21	4,583	14,491	32	5,657	17,889
11	3,317	10,488	22	4,690	14,832	33	5,745	18,166

Продолжение

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt{10n}$
34	5,831	18,439	57	7,550	23,875	80	8,944	28,284
35	5,916	18,708	58	7,616	24,083	81	9,000	28,460
36	6,000	18,974	59	7,681	24,290	82	9,055	28,636
37	6,083	19,235	60	7,746	24,495	83	9,110	28,810
38	6,164	19,494	61	7,810	24,698	84	9,165	28,983
39	6,245	19,748	62	7,874	24,900	85	9,220	29,155
40	6,325	20,000	63	7,937	25,100	86	9,274	29,326
41	6,403	20,248	64	8,000	25,298	87	9,327	29,496
42	6,481	20,494	65	8,062	25,495	88	9,381	29,665
43	6,557	20,736	66	8,124	25,690	89	9,434	29,833
44	6,633	20,976	67	8,185	25,884	90	9,487	30,000
45	6,708	21,213	68	8,246	26,077	91	9,539	30,166
46	6,782	21,448	69	8,307	26,268	92	9,592	30,332
47	6,856	21,679	70	8,367	26,458	93	9,644	30,496
48	6,928	21,909	71	8,426	26,646	94	9,695	30,659
49	7,000	22,136	72	8,485	26,833	95	9,747	30,822
50	7,071	22,361	73	8,544	27,019	96	9,978	30,984
51	7,141	22,583	74	8,602	27,203	97	9,849	31,145
52	7,211	22,804	75	8,660	27,386	98	9,899	31,305
53	7,280	23,022	76	8,718	27,568	99	9,950	31,464
54	7,348	23,238	77	8,775	27,749	100	10,00	31,623
55	7,416	23,452	78	8,832	27,928			
56	7,483	23,664	79	8,888	28,107			

Учебное издание

Шлыков Владимир Владимирович

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 10 класса учреждений,
обеспечивающих получение общего среднего образования,
с русским языком обучения с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание

Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редактор *Л. Н. Ясницкая*. Художник обложки *А. В. Шлыков*. Художник *Е. В. Шлыков*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *М. И. Чепловодская*. Компьютерная верстка *М. Я. Цофина*. Корректоры *Т. Н. Ведерникова, З. Н. Гришели, В. С. Бабеня*.

Подписано в печать с диапозитивов 04.12.2006. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура литературная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 11. Усл. кр.-отт. 44,8. Уч.-изд. л. 7,9. Тираж 78 092 экз. Заказ .

Издательское республиканское унитарное предприятие «Народная асвета»
Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

Республиканское унитарное предприятие «Минская фабрика цветной печати».
220024, Минск, Корженевского, 20.

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			